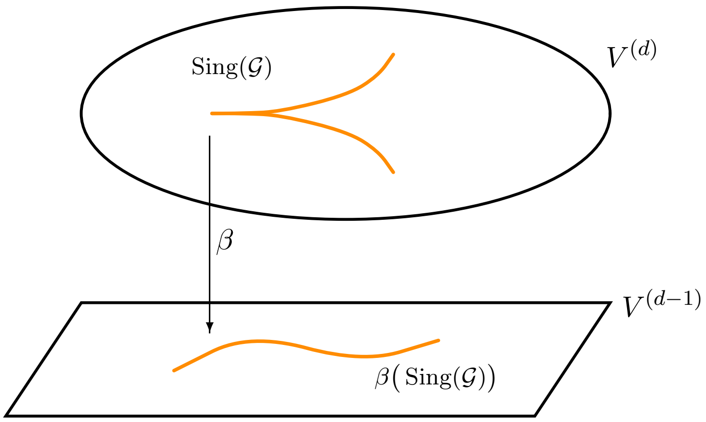
Invariantes de singularidades en característica positiva



Angélica Benito Sualdea

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Enero de 2010

Dirigida por el Profesor
Orlando E. Villamayor Uriburu

A mi familia,
el invariante que me sostiene.

No sé dar lecciones,
Je ne parle pas français.
No sé ecuaciones,
nunca despejé muy bien...
Hay tantas que no sé por qué las sé,
y lo que sé... sé que lo sé.

Tiza - Lo sé

Índice

Agradecimientos

Ahora que todo esto acaba es inevitable recordar la primera vez que puse en palabras la idea de estudiar matemáticas, fue una charla con mi padre: una persona callada y observadora; siempre he pensado que desde su silencio ve cosas del mundo que yo me pierdo, por eso me gusta consultarle las decisiones importantes, me gusta escuchar su opinión. Justo cuatro años después, me encontré en la misma situación, ¿hacer una tesis? De nuevo, acudí a él, la consecuencia es esto que a día de hoy parece que toca a su fin...

Han pasado cinco años y la vida ha dado muchas vueltas, pero curiosamente me he encontrado por el camino con otra persona silenciosa y observadora que merece mi más profundo respeto y admiración: Orlando. Durante estos cinco años he aprendido que, como sucede con mi padre, merece la pena escuchar sus opiniones. Son innumerables mis paseos hacia el 506 cada vez que hay una decisión que tomar, cuando quiero estar segura de lo que hago, por respuesta siempre recibo un buen consejo o sugerencia, un "lo pienso y te digo". Supongo que esto es lo que debería ser un director de tesis, pero sé que no es siempre es así y el hecho de que Orlando sea mi director me convierte en una persona tremendamente afortunada.

Quería empezar estos agradecimientos, en los que Orlando Villamayor debe ocupar un sitio importante, destacando la espectacular calidad humana del que es mi director de tesis. Me ha demostrado que ante todo me ha conocido como persona y siempre ha sabido cómo tratarme para que diera lo mejor de mí misma. Quiero agradecer todos sus consejos, sus palabras de aliento, su forma de tratarme, su entusiasmo. Todo lo que pueda decir aquí al respecto se queda pequeño. Respecto al aspecto matemático poco puedo decir, dada su conocida talla matemática; ha sido para mí un placer trabajar codo con codo con él, robándole horas y horas de su tiempo, prestándome atención a cada una de mis ideas locas: gracias por tu eterna paciencia conmigo... Escuchar y aprender las "matemáticas a la Villamayor" es algo increíble; profundizar en un problema tan importante y tan bonito como con el que nos hemos "enfrentado", es espectacular. Haber podido "trastear" con sus álgebras de eliminación, dando tantas vueltas al problema que me lleva quitando el sueño más de dos años y a él muchos más, es un regalo. En resumidas cuentas, es un honor poder decir que he sido y soy alumna de Orlando. Muchísimas gracias por todo.

Alrededor de esta tesis ha ocupado un lugar importante nuestro pequeño-gran grupo: Ana Bravo ha tenido una paciencia infinita conmigo, ayudándome y escuchándome mucho cuando empezaba en el 'mundo p', teniendo siempre unas palabras de ánimo, estando ahí siempre con su eterna sonrisa, haciendo de mi hermana matemática mayor... Gracias también por hacer la tediosa labor de lectora. A Santi Encinas le estoy muy agradecida por sus consejos, su entusiasmo, la paciencia con la que me explica en cada charla que compartimos, por ser mi ¡ohgranlíderespiritual! Adolfo Quirós, fue él quien me puso en el camino de Orlando y gracias a él conseguí mi primera beca. Gracias Adolfo también por la sinceridad con la que

siempre me has hablado y por tantos y tantos consejos como me has dado. Rocío, mi sobrina, con la que tantos congresos he compartido y tantas cosas me ha contado.

Al margen de lo puramente "profesional", el departamento de Matemáticas de la UAM (nuestro antiguo C-XV) ha sido un lugar muy agradable donde pasar tantas horas en estos años. Especialmente por la gente tan admirable que me he ido encontrando. Es inevitable particularizar:

No podría empezar por otra persona: Ana Primo, ha sido mi compañía durante estos años, son tantas las charlas, risas, problemas, meriendas, paseos, conversaciones hasta las mil, locuras... sabes que has sido como mi hermana aquí, el saber que andabas cerca siempre me ha dado tranquilidad, se te echa tanto de menos *Jenny*! Jose, no tengo palabras para agradecerte tu apoyo siempre incondicional, tienen cardinal no numerable todas nuestras charlas y consejos entre pizza, fútbol y cartas, todos los viajes, las risas, llamadas por teléfono y tu consuelo en los peores momentos... ¡gracias, torpedo! Enrique, Ernesto: mis compañeros de cafés matutinos, gracias por alegrarme cada mañana el día, pase lo que pase, sé que siempre estáis ahí para lo que necesite. Fernando, gracias por ayudarme tantísimo al principio. Y cómo no mis compañeros de despacho: el parlamento taiwanés (600), Elena y Mari Luz, todo el mundo debería empezar en un despacho como el que teníamos, han sido tantos buenos momentos...¡sois la caña!; mi 610: Enrique, Mari Jose (¡mi niña, tenerte por el despacho es un apoyo muy muy grande!) y Moisés (mi Mo, eres muy grande Mo, me alegro de poder conocerte cada día un poco más), gracias por aguantarme cada día, por hacer del despacho un sitio tan acogedor. Gracias al resto de compañeros becarios/pringadillos: Carlos (¡y su magia! siempre consigues sacarme una sonrisa, siempre consigues animarme, gracias), David (frikiman, eres grande), Elías (gracias por esas conversaciones que me han llenado tanto, hablar contigo siempre me da mucha tranquilidad), Nati (la voz de la razón, eres admirable), Ana J. (Jime, gracias por los ratos de risas, "investigación" y desvelos mailísiticos, ¡desastrosa!), Charro (y sus "charradas"), Adrián, Javi, Ana Peón (el verde omnipresente), Dani (¡mi Güey!), Miguel Ángel, Osvaldo (¡hermanillo, se te echa de menos!), Liviu, mis chicos del fútbol (¡Lujo! sois una gran vía de escape), Marisa (que tanto cuidó de mí), Amparo, Luis, Diana, y un largo etcétera...
Un gracias muy especial a mi *frikiteam*: Carlos, Mari Luz, "mamá" Granados y "tito" Pablo Fernández. Compartir aquella experiencia con vosotros fue algo único. Los consejos y vivencias de Ana y Pablo: algo impagable..
Gracias a los compañeros de Congresos por tantos buenos ratos. Especialmente a Helena que más que compañera de congresos es amiga, por tantos momentos, risas, charlas y mails y porque me ha enseñado el mejor bar de todo Madrid, ¡Olden! Hazlo extensible a maifrén Magdalena (y el vídeo "Gollum tesis de álgebra").
Muchas gracias al Departamento de Matemáticas en general, en particular a Eugenio Hernández y sus caramelos que me han animado tantos días. A la Secretaría al completo: Paloma (por hacerme todo siempre más fácil, ayudándome siempre te pida lo que te pida y siempre con una sonrisa), Antonio (la eficiencia personificada) y Cristina (la lata que te he dado...). Y por último la gente de la cafetería (Pili, Nico, Javi, Iñaki... en fin, todos), que nos animan con su buen humor cada día... ¿qué haría yo sin esas escapadas a las 19:45 a la cafetería?

Pero esta tesis no estaría aquí, si no fuera por la ayuda y el apoyo incondicional en todo momento, pase lo que pase, llueva, haga sol o nieve de lo más importante de mi vida: mis padres... Quiero empezar agradeciendo a mi madre, una persona

increíble, ella es la base, el pilar y la pieza clave de mi pequeña familia, es la que nos da fuerzas cada día, la que nos dice las cosas claras, la que consigue que nunca nos caigamos, que luchemos. A pesar de todos los malos momentos pasados, el ver las fuerzas que ha conseguido sacar es algo que nos ha ayudado a todos. Gracias, mamá, porque sé que decida lo que decida en la vida, siempre tendré tu apoyo y cariño y harás lo que haga falta para que me sea más fácil, tú me conoces como nadie. Pero si mi madre es la pieza clave, mi padre es el motor que nos impulsa. Hace ya 16 años me enseñó la lección más grande de mi vida: a enfrentarme a los problemas con una sonrisa y silbando una cancioncilla, su lucha y pundonor constante cuando era una niña me han marcado para siempre, ahora sé que las cosas se consiguen con esfuerzo y sacrificio, aunque no por ello hay que dejar de sonreír. Gracias, papá, porque, aunque siendo exigente, siempre has sabido darme mucho cariño. Gracias a los dos, todo lo bueno que pueda tener es gracias a vosotros. *Os quiero mucho.*

Quiero seguir con el resto de mi pequeña gran familia. Un verdadero apoyo en mi vida. Mis raíces castellanas creo que han forjado gran parte de mi carácter. Mis abuelos siempre han sido un ejemplo para mí, en una época tan difícil ellos fueron capaces de salir adelante. Tenéis que estar aquí: Cándido, Fortunato (¡qué orgulloso habrías estado de mí! te sigo echando tanto de menos...), Inés y Rosa. Además de mis abuelos, mis tíos y primos tienen un papel muy especial en mi vida. Las reuniones en familia, donde tanta “caña” me dan (¡qué fácil es meterse conmigo!) y tanto me río, son infinitamente reconfortantes, son una inyección de fuerza. Los malos momentos juntos son menos agrios (¡mucho ánimo Tía, Cris, Rafa!). El desconectar con alguna escapada al pueblo (demasiadas pocas...) ha sido parte de esta tesis. Gracias a todos, los Benito fuentenebreros y los Sualdea fuentemolineros.

¿Y cómo no? Mis amigas de Sanse (“las chicas”), Aurora, Laura, Noelia y Nuria: por su ánimo incondicional. Siempre habéis sido un punto de escape de todo esto, puede que no seáis conscientes de ello, pero ese jueves de claretes por la Latina, algunas cervecitas domingueras, los miércoles de telebasura, las cenas o comidas, las partiditas de trivial, el “aquí hemos venido a jugar y jugamos”, el encontrar los “putos” singulares del infinito, los kebabs con “queco”... han sido muy muy importantes. Gracias, chicas, no cambiéis.

Gracias también a Elisa y Rocío, por acompañarme durante la carrera, por insistirme en empezar este camino.

Como persona maniática o peculiar que soy, no puedo evitar acordarme de ciertos elementos que me han acompañado en el camino: la *pizarra de los teoremas falsos* del despacho de Orlando, porque poco a poco los ha ido convirtiendo en verdaderos; mi colección de plantitas del despacho; y cómo no... el *búho* de la hemeroteca. Gracias a aquel loco que inventó la música porque me ha dado la compañía perfecta para tantas horas de soledad, en los mejores momentos y en los más bajos; esta tesis está en papel, pero tiene una banda sonora detrás que acompaña cada página. Gracias a Tiza por dejarme usar, de forma tan amable, su “*lo sé*”.

Por último, agradecer a todos aquellos que con un comentario, charla, risa o a saber el qué me haya ayudado a desconectar, a evadirme, a hacerme sentir bien.

Sin todos vosotros esta tesis no estaría ahora aquí. Sin todos vosotros todo habría sido más difícil.

¡Gracias!

Capítulo I

Introducción

1. Panorama histórico

La noción de singularidad está muy presente en varias ramas de las matemáticas, siendo por tanto de especial importancia su estudio y comprensión. Desde el punto de vista del álgebra más elemental, una *singularidad* se puede identificar con la aparición de raíces múltiples en un polinomio de una variable. Geométricamente, una variedad es *no singular* en un punto cuando coinciden la dimensión del espacio tangente y la de la propia variedad. En geometría algebraica, una variedad es no singular en un punto si el anillo local en el punto es un anillo local regular.

Un problema central dentro del ámbito de la geometría algebraica consiste en intentar eliminar las singularidades por ciertas transformaciones algebraicas. Es decir, la pregunta que se plantea es: *Dada una variedad algebraica singular X, ¿existe un morfismo birracional propio $X \xleftarrow{\pi} Y$ de tal forma que Y sea no singular?* A este problema se le conoce como *resolución de singularidades*. Una formulación más fuerte de este problema, impone que π defina un isomorfismo sobre el conjunto de puntos regulares de X, $\mathrm{Reg}(X)$.

El problema de resolución de singularidades obtuvo sus primeros resultados durante la segunda mitad del siglo XIX, gracias a la fuerte y frecuente comunicación entre la escuela de geometría algebraica italiana liderada por Cremona y la escuela alemana, cuyos máximos exponentes fueron Klein y M. Noether. En 1873 Noether demostró que las singularidades de cualquier curva plana se pueden resolver mediante una sucesión finita de transformaciones cuadráticas.

En 1897, Beppo Levi en [43] trata el caso de singularidades puntuales de variedades de dimensión 2 de forma local. En 1935, Walker ([61]) da una prueba analítica para el caso de superficies complejas globalizando los argumentos locales usados por Jung en 1908 ([42]). En 1939 Zariski ([62]) propuso una reducción de este mismo problema y dando un año más tarde una prueba de la uniformización local ([63]). El siguiente resultado también se debe a Zariski, quien en 1944 demostró la resolución de singularidades para esquemas de dimensión 3 ([64]).

En 1964, Heisuke Hironaka da una demostración de la resolución de singularidades para variedades de cualquier dimensión sobre cuerpos de característica cero en su extenso artículo *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, ([33]).

La demostración dada por H. Hironaka no es constructiva, es un resultado de naturaleza existencial. Hasta finales de los años ochenta, pero sobretodo hasta los años noventa, no se desarrollaron nuevas estrategias para afrontar la resolución de singularidades de una forma algorítmica. Estos primeros trabajos, que proporcionan un método para la resolución, se deben principalmente a Villamayor ([54], [55]), Bierstone-Milmann([7], [8]), Encinas-Villamayor ([20], [21], [22]), Encinas-Hauser ([19]). Son destacables también los trabajos de Włodarczyk ([59]), Bravo-Villamayor ([10], [11]), Bravo-Encinas-Villamayor ([9]), Hauser ([28], [30]) y los libros de Cutkosky ([18]) y Kollar ([41]).

Pese a los grandes avances realizados en característica 0, el problema en característica positiva se presenta como un problema aún abierto en el contexto más general. El argumento inductivo utilizado en característica 0 (que presentaremos más adelante) y que se basa en la existencia de hipersuperficies de contacto maximal, no es válido en característica positiva por la ausencia de estas hipersuperficies.

Los primeros resultados en característica positiva se deben a S.S. Abhyankar, quien en su tesis probó la uniformización local de esquemas de dimensión 2 sobre cuerpos de característica p ([1]). Extendiendo este resultado a resolución no inmersa de esquemas de dimensión 3 para característica $p \neq 2, 3, 5$ ([2]). El siguiente resultado se debe a J. Lipman, quien prueba la resolución (no inmersa) de cualquier esquema excelente de dimensión 2, mediante argumentos de cohomología y dualidad, reduciendo cualquier singularidad a una singularidad racional ([44], [45]).

En los últimos años, el problema de resolución en característica positiva ha sido ampliamente estudiado, dando lugar este estudio a gran cantidad de avances. Para el caso de variedades de dimensión 3 han aparecido diversas pruebas de resolución no inmersa por parte de Cutkosky ([17]) y Cossart-Piltant ([15], [16]). Recientemente, Cossart-Jansen-Saito en [14] prueban la resolución inmersa para el caso de variedades de dimensión 2.

Las patologías propias de la característica positiva, han sido estudiadas ampliamente por parte de Moh ([47]), Hauser ([31]) y Cossart ([13]). El estudio y compresión de estos fenómenos que aparecen en característica positiva puede ser un punto clave para una posible demostración del caso general.

Finalmente, conviene resaltar las diferentes aproximaciones que han surgido en los últimos años intentando abordar el caso de esquemas de dimensión arbitraria: Villamayor reemplaza la noción clásica (en característica 0) de restricción a hipersuperficies por la de proyecciones transversales. Las ideas desarrolladas en ([56], [58], [12]) serán las seguidas en esta memoria. Kawanoue-Matsuki haciendo uso de operadores diferenciales para definir invariantes han desarrollado un programa de resolución en caracterísitca positiva ([39], [40]). Włodarczyk ([60]) e Hironaka ([38]) han presentado recientemente programas en los que encaran el problema general.

2. El problema en Característica 0

2.1. Para entender mejor el problema en característica positiva, parece adecuado comprender bien el problema en característica 0, analizar qué argumentos no se pueden reproducir y estudiar qué resultados se pueden generalizar.

Usaremos $V^{(d)}$ para denotar un esquema liso de dimensión d sobre un cuerpo k. Un problema, que surge de manera muy natural en el contexto de resolución de singularidades, aparece al considerar una hipersuperficie X de multiplicidad máxima n, incluida en $V^{(d)}$.

El objetivo es definir una sucesión de transformaciones monoidales

$$\begin{array}{ccccccc} X & & X_1 & & & & X_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array}$$

donde los centros estén incluidos en el conjunto de puntos de multiplicidad n de X y sus sucesivos transformados estrictos, de tal forma que el transformado estricto de X, digamos X_r, no tenga puntos de multiplicidad n.

A lo largo de esta memoria, reformularemos los problemas de resolución en términos de álgebras de Rees definidas sobre $V^{(d)}$. Estudiaremos con más detalle este tipo de álgebras en el Capítulo II, donde expondremos los principales resultados e ideas de [57] y [23]. Veamos aquí una idea intuitiva:

Un *álgebra de Rees* sobre $V^{(d)}$ se define como un álgebra graduada finitamente generada de la forma $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n \subset \mathcal{O}_{V^{(d)}}[W]$, donde I_n es un haz de ideales que cumple

$$I_0 = \mathcal{O}_{V^{(d)}} \ \text{ y } \ I_n \cdot I_m \subset I_{n+m} \text{ para cada } n, m \in \mathbb{N}$$

y W es una variable muda utilizada para controlar el grado de los ideales.

A cada álgebra de Rees $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}$ se le asocia un conjunto cerrado, el *lugar singular*, definido como

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}) = \{x \in V^{(d)} \mid \nu_x(I_n) \geq n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Supongamos por ejemplo que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[fW^n]$, entonces el lugar singular, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, es el conjunto de puntos de multiplicidad n de la hipersupeficie definida como $X = V(f)$.

En este conjunto cerrado $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ podemos definir una función

$$\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G}) : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

dada por

$$\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = \min_n \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}$$

para cada punto $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.

Diremos que $\mathcal{G}$ es un álgebra de Rees *simple* si existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $\nu_x(I_n) = n$ para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, i.e., $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = 1$ para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Un ejemplo sencillo de álgebra de Rees simple se da cuando $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_n W^n]$, y f_n es tal que $V(f_n) = X$ es una hipersuperficie cuya multiplicidad máxima en sus puntos es n.

Una vez definidas las álgebras de Rees, es natural plantear una noción de transformados de álgebras de Rees. Fijada una transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$ a lo largo de un centro cerrado liso $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, existe una factorización de la forma

$$I_m \mathcal{O}_{V_1^{(d)}} = I(H)^m \cdot I_m^{(1)} \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N},$$

donde denotamos por $H = \pi^{-1}(C)$ a la hipersuperficie excepcional definida por la transformación. Así, podemos definir una nueva álgebra de Rees, $\mathcal{G}_1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n^{(1)} W^n$ que recibirá el nombre de *transformado de* $\mathcal{G}$ y que denotaremos por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_C} & V_1^{(d)} \end{array}$$

De forma análoga, se puede definir una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$, para ello se consideran siempre los centros de la transformación incluidos en el lugar singular del correspondiente transformado de $\mathcal{G}$.

Diremos que una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array} \tag{I.1}$$

define una *resolución de* $\mathcal{G}$ si se cumple

1. $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) = \emptyset$;

2. El conjunto de hipersuperficies excepcionales introducidas por la sucesión de transformaciones, digamos $E_r = \{H_1, \ldots, H_r\}$, tiene cruzamientos normales en $V_r^{(d)}$.

2.2. Álgebras de Rees y estructura diferencial.

La teoría de singularidades está estrechamente relacionada con la teoría de operadores diferenciales. Más concretamente, es bien sabido que fijado un elemento f de multiplicidad máxima n, y D un operador diferencial de orden r, entonces $D(f)$ es 0 o su multiplicidad máxima es a lo sumo $n - r$. Es muy natural estudiar la compatibilidad de los operadores diferenciales con las álgebras de Rees.

Las álgebras de Rees dotadas de una estructura diferencial permitirán desarrollar una teoría de eliminación que estudiaremos más adelante. El uso de álgebras graduadas (álgebras de Rees) en lugar de los clásicos pares de ideales se debe, entre otros hechos, a una mejor formulación de propiedades definidas por medio de operadores diferenciales.

Diremos que un álgebra de Rees $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$ es un *álgebra de Rees diferencial* si para cada elemento $fW^n \in \mathcal{G}$ y para cada $D \in Diff_k^r$ (operador diferencial de orden r) con $r \leq n$, se cumple que $D(f_n)W^{n-r} \in \mathcal{G}$.

Dada un álgebra de Rees $\mathcal{G}$ existe una forma natural de extender $\mathcal{G}$ a un álgebra $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, de tal forma que $\mathcal{G}'$ es la mínima álgebra diferencial en la que $\mathcal{G}$ está contenida (véase [57]). Esta álgebra $\mathcal{G}'$, tiene una propiedad adicional que la hace especialmente interesante:

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}') = \mathrm{Sing}(\mathcal{G}).$$

Un conocido Lema de Giraud afirma que cualquier sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ induce una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}'$ (y viceversa), más aún la igualdad de lugares singulares se preserva. En particular, una resolución de $\mathcal{G}'$ induce una resolución de $\mathcal{G}$. Por tanto, partiremos de la hipótesis de que $\mathcal{G}$ es un álgebra diferencial y simple.

2.3. Característica 0.

Supongamos ahora que $V^{(d)}$ es un esquema definido sobre un cuerpo k de característica 0. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$ un álgebra diferencial y simple. Para cada punto cerrado $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, existe un índice n, tal que $\nu_x(I_n) = n$. Como $\mathcal{G}$ es un álgebra diferencial, entonces existe $D \in Diff^{n-1}$ y un elemento $f_n \in I_n$, tal que $D(f_n) \in I_1$ es un elemento de orden 1. Este resultado de la bajada en uno de la multiplicidad tras aplicar operadores diferenciales es clave: sucede siempre en característica cero, pero falla en característica positiva (desapareciendo la existencia de elementos de orden 1 en el álgebra).

En este caso, $\overline{V} = \{D(f_n) = 0\}$ define un subesquema liso que recibe el nombre de *hipersuperficie de contacto maximal.* Se puede así definir una nueva álgebra de Rees gracias a la restricción a esta hipersuperficie lisa: $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{I}_n$, donde $\overline{I}_n$ es la restricción de I_n a $\overline{V}$. Este álgebra $\overline{\mathcal{G}}$ recibe el nombre de *álgebra de coeficientes* y está definida en un subesquema de dimensión $d-1$. Más aún, se cumple

- $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{V}$ y $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) = \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.
- Fijada una sucesión de transformaciones como (I.1) y denotando por $\overline{V}_i$ al transformado estricto de $\overline{V}$, se cumple que

$$\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}_i) \subset \overline{V}_i \quad \text{y} \quad \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_i) = \mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}_i).$$

- Cualquier sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ como (I.1) induce una sucesión de transformaciones de $\overline{\mathcal{G}}$, digamos $\overline{V} \xleftarrow{\overline{\pi}} \overline{V}_r$. Más aún, el lugar excepcional de $\overline{\pi}$ tiene cruzamientos normales en $\overline{V}$. En particular, cualquier resolución de $\overline{\mathcal{G}}$ sobre $\overline{V}$ induce una resolución de $\mathcal{G}$ en $V^{(d)}$. Se puede, por tanto, iniciar la inducción en el contexto de álgebras simples.

La resolución de singularidades en característica 0 se hace en dos etapas:

1. Monomializar $\overline{\mathcal{G}}$, es decir, definir una sucesión de explosiones como (I.1), de tal forma que $\mathcal{G}$ sea un álgebra monomial soportada en el lugar excepcional $\overline{E}_r = \{\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_r\}$, i.e.,

$$\overline{\mathcal{G}}_r = \mathcal{O}_{\overline{V}}[I(\overline{H}_1)^{\alpha_1} \ldots I(\overline{H}_r)^{\alpha_r} W^s]$$

   para ciertos $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, r$.

2. Resolver de manera combinatoria el monomio $\overline{\mathcal{G}}_r$. La resolución de este monomio induce una sucesión de explosiones en $V_r^{(d)}$ que define una resolución de $\mathcal{G}$.

3. Característica arbitraria

3.1. En el caso de característica positiva, en general, no existen hipersuperficies de contacto maximal, es decir, no se pueden reproducir los mismos argumentos usados en el caso anterior.

Fijemos un álgebra de Rees $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$ que sea diferencial y simple. Sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado. Cuando k es un cuerpo de característica $p > 0$, no existen, en general, hipersuperficies de contacto maximal, debido al hecho de que en I_1 podría no haber elementos de orden 1. El descenso en uno de la multiplicidad que se obtenía en el caso de característica 0, no es aplicable en este caso.

Pero no sólo nos encontramos con la ausencia de un elemento de orden 1 en el álgebra (y por tanto de hipersuperficies de contacto maximal), si no que existen ejemplos en los que el lugar singular de una variedad no está contenida en ninguna superficie de codimensión menor. Éste es el caso del ejemplo propuesto por Narasimhan ([49], [50]).

Por tanto, hay que buscar una alternativa a las hipersuperficies de contacto maximal. En esta memoria, siguiendo lo hecho en [56], [58], reemplazaremos la restricción por proyecciones transversales:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}.$$

Por $V^{(d-1)}$ denotaremos un esquema liso de dimensión $d-1$. La definición rigurosa de proyección genérica y un estudio más detallado de éstas se verá en el Capítulo IV. Adicionalmente veremos la relación que tienen estas proyecciones con el invariante τ definido por Hironaka ([33]) y que está muy presente en trabajos de Oda ([51], [52] o [53]).

El invariante τ, que se definirá en función del espacio tangente en un punto, indicará el número de variables a eliminar en las proyecciones transversales β. En el Capítulo IV mostraremos el buen comportamiento del invariante τ con la teoría de eliminación desarrollada en el Capítulo III.

Asociadas a las proyecciones genéricas se puede definir de una manera muy natural, un álgebra de Rees en $V^{(d-1)}$, digamos $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, esta álgebra recibirá el nombre de *álgebra de eliminación*. La noción de álgebras de eliminación y sus principales propiedades fueron introducidas en [56]. En el Capítulo III, expondremos de manera resumida la construcción de esta álgebra, los resultados más importantes, así como una serie de ejemplos para clarificar su construcción.

Como veremos también en el Capítulo III, la definición de las álgebras de eliminación es independiente de la característica. Cuando la característica es 0, la proyección genérica β induce una aplicación étale

$$\overline{V} \xrightarrow{\overline{\beta}} V^{(d-1)}$$

y el álgebra de coeficientes $\overline{\mathcal{G}}$ se puede identificar con $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ vía esta aplicación $\overline{\beta}$. Daremos una demostración de este hecho al final del Capítulo III.

En característica arbitraria, como consecuencia del Teorema de Multiplicidad de Zariski, se demuestra que existe una biyección entre $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ y $\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}))$ (véase [12] 8.4. y Proposición V.1.3 en esta memoria).

La identificación entre $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ y $\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}))$, junto con el Teorema 4.11 de [56] en el que se demuestra que si $\mathcal{G}$ es diferencial, entonces $\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) =$

$\mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$, permite identificar (en el caso de álgebras diferenciales) el lugar singular de $\mathcal{G}$ con el de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$.

Una vez definidas las álgebras de eliminación en dimensión $d-1$, interesa ver si existe algún tipo de compatibilidad de las proyecciones genéricas, las álgebras y la igualdad de lugares singulares con transformaciones monoidales. El Capítulo V estará dedicado a estudiar estos fenómenos. Los resultados planteados en este Capítulo V han sido expuestos y demostrados previamente en [56] y [12], en esta memoria veremos algunos de estos resultados de manera más detallada y en algunos caso de forma alternativa.

Fijada una transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$ a lo largo del centro $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, se cumple entonces que $\beta(C)$ es un centro liso (véase [12] Teorema 9.1. y Teorema V.1.4 en esta memoria) y que de hecho es compatible con la proyección genérica β (V.1.6).

Como consecuencia de estas afirmaciones, se deduce el Teorema 9.1. de [12] (Teorema V.2.3 en esta memoria):

1. El siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[d, "\beta_1"] \\ V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\pi_{\beta(C)}"'] \end{tikzcd}$$

   donde $\mathcal{U}$ es un abierto que contiene a $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)$ y β_1 es una proyección genérica determinada de manera única.

2. Si $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$ es el transformado de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}$ el álgebra de eliminación de $\mathcal{G}_1$ (respecto de β_1). Entonces,

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}.$$

A pesar de las buenas propiedades que recogen las álgebras de eliminación, después de una transformación monoidal se pierde la igualdad de lugares singulares, es decir, se va a dar únicamente una inclusión

$$\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}\big((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1\big). \tag{I.2}$$

En el Ejemplo V.2.7 se muestra un ejemplo patológico en el que esta inclusión es estricta.

En el Teorema Principal de [12] (Teorema 10.1), se simplifica la expresión del álgebra de eliminación, demostrando que existe una sucesión de transformaciones monoidales como (I.1) que induce una sucesión

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\
V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_{C_1}} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_{C_r}} & V_r^{(d)} \\
\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta_r} \\
V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi_{\beta(C_1)}} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_{\beta(C_r)}} & V_r^{(d)} \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 & & & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r
\end{array}
\tag{I.3}
$$

donde el álgebra de eliminación es un álgebra monomial soportada en el lugar excepcional:

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[I(H_1)^{\alpha_1}\dots I(H_r)^{\alpha_r}W^s\right].$$

Debido a (I.2), la resolución combinatoria del álgebra de eliminación monomial no induce, en general, una sucesión de transformaciones en $V_r^{(d)}$

Bajo estas hipótesis, el objetivo principal de esta memoria será definir invariantes asociados a las hipersuperficies excepcionales definidas por la secuencia de transformaciones (I.3). Para ello definiremos una noción de *pendiente excepcional*, que estudiaremos en profundidad para el caso en el que trabajemos con una hipersuperficie definida por

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}[z]}.$$

Las técnicas usadas en esta memoria para describir esta pendiente excepcional serán el germen de los principales resultados expuestos en [6], donde se generaliza la noción de pendiente a puntos cualesquiera (no sólo puntos genéricos de excepcionales) y se ampliará la definición al contexto de álgebras.

Estas funciones pendiente definidas en el contexto más general, darán lugar a una función inductiva bien definida (Teorema Principal 1 de la Parte I de [6]).

Veamos ahora, la estructura del Capítulo VI, que recoge los resultados principales de esta memoria. En la sección VI.1, fijado un polinomio mónico de orden p^e, $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e}$ y una hipersuperficie excepcional H, definimos el concepto de *pendiente excepcional*:

$$Sl_H(f_{p^e}, z) := \min_{1\leq j\leq p^e}\left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}\right\},$$

donde por ξ_H denotamos el punto genérico de hipersuperficie excepcional H.

El objetivo de esta primera sección, será demostrar que existen secciones z para los que esta función Sl_H alcanza valores máximos. Caracterizaremos estas secciones z y daremos un sencillo algoritmo para calcular tales secciones a partir de una cualquiera.

Una vez analizado el caso de polinomios, lo natural es tratar de extender esta noción al contexto de álgebras. Es decir, fijada un álgebra de Rees $\mathcal{G}$ y una hipersuperficie excepcional H, queremos definir un análogo de Sl_H para $\mathcal{G}$. Desarrollaremos estas ideas en la Sección VI.2, pero para ello necesitaremos un resultado previo, ya tratado en [56], [58] y [6] y que aquí mostraremos en el Teorema IV.3.2:

Existe un número natural p^e (una potencia de la característica del cuerpo) y una sección transversal de β definida por $z = 0$, ($x \in \{z = 0\}$), tales que se cumple

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}(z)W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}(z))W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}, \tag{I.4}$$

donde por $\sim$ denotamos la misma clausura entera, $f_{p^e}(z)$ es un polinomio mónico en z de orden p^e, i.e.,

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[z],$$

y $\Delta^{(\alpha)}$ son operadores diferenciales relativos a β de orden α. Es decir, a menos de clausura entera, se puede asumir que el álgebra está definida por un polinomio mónico $f_{p^e}(z)$ (sus derivadas relativas) y el álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$.

La noción de *pendiente excepcional* relativa a un álgebra $\mathcal{G}$ surge de manera natural como

$$Sl_H(\mathcal{G}, z) := \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{ \frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}, \mathrm{ord}^{(d-1)}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H) \right\}.$$

En el Teorema VI.2.4, se prueba que se puede hacer una reducción importante:

$$\begin{aligned} Sl_H(\mathcal{G}, z) &:= \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{ \frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}, \mathrm{ord}^{(d-1)}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e}, \mathrm{ord}^{(d-1)}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H) \right\}, \end{aligned}$$

es decir, esto prueba que toda la información significativa de la singularidad está centrada en el álgebra de eliminación y el término independiente a_{p^e}. De forma intuitiva, podemos pensar que este resultado nos permite manejar el caso de un polinomio arbitrario $f_{p^e}(z)$ como si fuera un caso puramente inseparable gracias al álgebra de eliminación.

Ahora, usando lo probado en la sección anterior, será sencillo dar criterios para optimizar el valor de Sl_H en función de la sección z. Definiremos como *exponente excepcional* el valor máximo de los valores que puede tomar la pendiente excepcional:

$$\frac{h}{s} = \max_{z}\{Sl_H(\mathcal{G}, z)\}.$$

Es interesante observar que en el caso de característica 0, el valor $\frac{h}{s}$ coincide con $\mathrm{ord}^{(d-1)}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H)$, coincidiendo este valor (de forma ponderada) con la máxima potencia de la hipersuperficie excepcional que se puede factorizar en $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$.

En la Sección VI.3 se prueba que si z es una sección para la que se alcanza el máximo valor de $Sl_H(\mathcal{G}, z)$ (i.e., $Sl_H(\mathcal{G}, z) = \frac{h}{s}$), entonces la inclusión

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot I(H)^h W^s$$

es óptima, donde $\frac{h}{s} = Sl_H(\mathcal{G}, z)$. Es óptima en el sentido de que si

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot I(H)^a W^m,$$

entonces $\frac{a}{m} \leq \frac{h}{s}$ o equivalentemente $I(H)^h W^s \subset I(H)^a W^m$.

De hecho, el Teorema VI.3.7 afirma:

Teorema. *Los exponentes excepcionales $\frac{h}{s}$ definidos de manera local son independientes de la proyección β y de la sección óptima z elegida.*

Para demostrar este Teorema, utilizamos un argumento motivado por el "Truco de Hironaka", pero en lugar de añadir espacios afines, en nuestro argumento ampliamos el esquema en el que estamos trabajando añadiendo raíces N-ésimas de la hipersuperficie excepcional.

Como corolario de este Teorema, se tiene que existen secciones z para las que se cumple

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot I(H)^h W^s$$

(y esta inclusión es óptima), dicho en términos del polinomio mónico $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$ y el álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$:

$$a_j W^j \in I(H)^h W^s \text{ para } j = 1, \ldots, p^e \text{ y } (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \subset I(H)^h W^s,$$

es decir, de forma ponderada $\frac{h}{s}$, es la máxima potencia del excepcional que se puede factorizar de los coeficientes y del álgebra de eliminación.

La pregunta natural que se plantea es la relación que existe entre las posibles secciones para las que se cumple esta condición.

En el Teorema VI.4.10, demostraremos que dadas dos secciones óptimas, z y z', para las que se cumple la inclusión anterior, se tiene que

$$\langle z \rangle W \odot I(H)^h W^s = \langle z' \rangle W \odot I(H)^h W^s,$$

es decir, existen elementos $\alpha, u \in I(H)^h W^s$ tal que $z' = uz + \alpha$ y u es una unidad, o dicho de otra forma, se puede pasar de una sección a otra mediante un cambio de variables compatible con el monomio $I(H)^h W^s$. Veremos además que el recíproco también es cierto.

Una vez realizado el estudio detallado para una hipersuperficie excepcional H, nos planteamos generalizar los resultados para una colección de hipersuperficies excepcionales (con cruzamientos normales), es decir, dada una sucesión de transformaciones

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array} \tag{I.5}$$

en la Sección VI.6 estudiaremos si el monomio definido como previamente, es de nuevo óptimo, global y está bien definido.

Para ello, repetiremos el esquema realizado previamente, es decir, trabajaremos primero con una ecuación $f_{p^e}(z)$ y estudiaremos su comportamiento con varias hipersuperficies excepcionales. Trataremos después con un álgebra y veremos que existe una compatibilidad entre la definición del álgebra monomial y transformaciones monoidales, pudiendo así llegar a enunciar el Teorema VI.5.15. Este Teorema extiende y detalla lo presentado en [5]:

Teorema. *El álgebra monomial $\mathcal{M}W^s$ definida a partir de los exponentes virtuales es tal que:*

(i) *El ideal monomial $\mathcal{M}$ divide al ideal monomial del álgebra de eliminación, es decir,*

$$\mathcal{M} = I(H_1)^{h_1} \dots I(H_r)^{h_r} \text{ con } 0 \leq h_i \leq \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, r.$$

(ii) *Localmente en cada punto, existe una sección transversal $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$ tal que*

$$\mathcal{G}_r \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s. \tag{I.6}$$

y $\mathcal{M}_r W^s$ es óptima con esta propiedad.

A este álgebra monomial $\mathcal{M}W^s$ la llamaremos *álgebra monomial virtual.*

La última propiedad del Teorema se puede reinterpretar como que $\mathcal{M}W^s$ es óptima en el siguiente sentido: Fijada una sección z como la del Teorema, y tal que

$$f_{p^e}^{(r)}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e - 1} + \cdots + a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}[z],$$

se cumple que

$$a_j W^j \in \mathcal{M}W^s \text{ para } j = 1, \dots, p^e \text{ y } (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \subset \mathcal{M}W^s. \tag{I.7}$$

y si dada cualquier otra álgebra monomial $\mathcal{N}W^{s'}$ soportada en el lugar excepcional que cumple la condición anterior (I.7), entonces $\mathcal{M}W^s \subset \mathcal{N}W^{s'}$. Es decir, $\mathcal{M}W^s$ es el monomio excepcional óptimo que se puede factorizar (de manera ponderada) de los coeficientes y el álgebra de eliminación.

Este Teorema será el punto de partida y la motivación del Teorema Principal 2 de la Parte I de [6].

Finalizaremos la sección probando la canonicidad de las secciones transversales (Teorema VI.5.18), de forma análoga a lo enunciado previamente.

En la Sección VI.6 presentaremos una serie de resultados relacionados con el álgebra monomial previamente definida. En la Sección VI.7, mostraremos otras caracterizaciones alternativas del álgebra monomial.

Acabaremos la memoria (Sección VI.8) mostrando una serie de ejemplos patológicos para mostrar cómo se construye el álgebra monomial y las buenas propiedades que parece aportar.

4. Otras aplicaciones de los resultados de esta memoria

Además de los resultados ya citados previamente, en la Parte II y Parte III de [6] se obtienen otros dos resultados que son consecuencia de los Teoremas Principales de la Parte I:

- En la Parte I de [6] se introduce la noción de p-presentación, inspirada en el Teorema VI.2.4. Estas p-presentaciones darán lugar a nuevos invariantes en característica positiva.

  El álgebra monomial virtual previamente mencionada servirá, junto con la función inductiva, como elemento de caracterización de un llamado *caso monomial fuerte*. Este caso monomial fuerte es una generalización del caso monomial de característica 0. En la Parte II de [6] se prueba que si $\mathcal{G}_r$ está en el caso monomial fuerte, entonces existe una sucesión de transformaciones (definida por la resolución combinatoria del álgebra monomial) que definirá una resolución de singularidades.

- De nuevo haciendo uso de las p-presentaciones, en la Parte III de [6] se definirá una peculiar estratificación del lugar singular (usando adicionalmente la función inductiva y el álgebra monomial). Esta estratificación del lugar singular y la consideración de unos nuevos invariantes llevará a probar resolución inmersa de singularidades para esquemas de dimensión 2 de una manera bastante sintética. Esta demostración es alternativa a la dada en [14].

Los nuevos invariantes y la nueva estratificación dada en este contexto, abren las puertas a estudiar su posible generalización al caso de dimensión arbitraria.

Capítulo II

Álgebras de Rees

A lo largo de este Capítulo definiremos una de nuestras herramientas principales a lo largo de toda la memoria, las álgebras de Rees. Estas álgebras codificarán la información relevante de la singularidad de un modo algebraico.

1. Definiciones

Comenzaremos el Capítulo, dando las definiciones básicas de álgebras de Rees y los elementos característicos que se pueden definir en este contexto.

Definición 1.1. Sea B un anillo noetheriano y sea $\{I_n\}_{n\geq 0}$ una colección numerable de ideales que cumplen las siguientes condiciones

(1) $I_0 = B$, y

(2) para cada par de enteros $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se cumple

$$I_r \cdot I_s \subset I_{r+s}.$$

Con estas condiciones, podemos definir un subanillo graduado

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} I_n W^n,$$

del anillo de polinomios $B[W]$ (donde la variable W nos servirá como variable muda auxiliar para recordar el grado). Diremos que $\mathcal{G}$ es un *álgebra de Rees* si además este subanillo es una B-álgebra finitamente generada.

Hemos dado una definición de álgebras de Rees como subanillos graduados de un anillo de polinomios. Ahora bien, esta definición se puede generalizar a un contexto más amplio como en el que vamos a trabajar.

Definición 1.2. Sea V un esquema liso y sea $\{\mathcal{I}_n\}_{n\geq 0}$ una colección numerable de haces de ideales, que cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_V$.

(2) Fijados enteros $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se cumple

$$\mathcal{I}_r \cdot \mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}_{r+s}.$$

A partir de este haz de ideales, podemos definir un haz de álgebras graduado de $\mathcal{O}_V[W]$ (donde de nuevo, W es una variable muda auxiliar) dado por

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{I}_r W^r.$$

Diremos que esta álgebra $\mathcal{G}$ es un *álgebra de Rees* si existe un recubrimiento abierto de V, dado por conjuntos abiertos afines, $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ tal que para cada $i \in \Lambda$.

$$\mathcal{G}(U_i) = \bigoplus_{r \geq 0} I_r W^r \subset \mathcal{O}_V(U_i)[W]$$

es una subálgebra (de $\mathcal{O}_V(U_i)[W]$) finitamente generada, siendo $\mathcal{I}_r(U_i) = I_r$. Es decir, $\mathcal{G}$ es una $\mathcal{O}_V[W]$-subálgebra graduada noetheriana que localmente está finitamente generada (con las condiciones extras dadas por (1) y (2)).

Observación 1.3. Dado un subconjuto abierto afín $U(\subset V)$, existe un conjunto finito de elementos

$$\mathcal{F} = \{f_1 W^{n_1}, \ldots, f_s W^{n_s}\},$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ son ciertos enteros y los elementos $f_i \in \mathcal{O}_V(U)$. Este conjunto $\mathcal{F}$ es tal que la restricción del álgebra de Rees $\mathcal{G}$ al abierto U es de la forma

$$\mathcal{G}(U) = \mathcal{O}_V(U)[f_1 W^{n_1}, \ldots, f_s W^{n_s}](\subset \mathcal{O}_V(U)[W]).$$

En este caso, diremos que $\mathcal{F} = \{f_1 W^{n_1}, \ldots, f_s W^{n_s}\}$ es un *conjunto de generadores* de $\mathcal{G}$ localmente en U.

A partir de este hecho, es fácil observar que cualquier elemento $fW^n \in \mathcal{G}$ se puede expresar como combinación ponderada de los elementos de $\mathcal{F}$. Es decir, existe un polinomio homogéneo con pesos de grado n y coeficientes en $\mathcal{O}_V(U)$, denotémosle por $F_n(Y_1, \ldots, Y_n)$, donde cada variable Y_j tiene peso n_j y se cumple además que

$$f = F_n(f_1, \ldots, f_s).$$

Observación 1.4. Otro hecho importante a observar es que las álgebras de Rees y los anillos de Rees están estrechamente relacionados.

Definimos un *anillo de Rees* como un álgebra de Rees tal que para cada subconjunto abierto afín U, se puede elegir como sistema de generadores de $\mathcal{G}$ un conjunto $\mathcal{F} = \{f_1 W^{n_1}, \ldots, f_s W^{n_s}\}$, donde ahora $n_i = 1$ para $i = 1, \ldots, s$.

La principal relación entre álgebras de Rees y anillos de Rees es que las álgebras de Rees se pueden interpretar como clausuras enteras de anillos de Rees, es decir, si N es un entero positivo que es divisible por todos los pesos n_i del conjunto de generadores $\mathcal{F}$, entonces el álgebra

$$\mathcal{O}_V(U)[f_1W^{n_1}, \ldots, f_sW^{n_s}] = \bigoplus_{k\geq 0} I_kW^k \ (\subset \mathcal{O}_V(U)[W]),$$

es entera sobre el subanillo de Rees

$$\mathcal{O}_V(U)[I_NW^N] \ \ (\subset \mathcal{O}_V(U)[W^N]).$$

Definición 1.5. A cada álgebra de Rees $\mathcal{G}$ se le puede asociar un conjunto cerrado, llamado *lugar singular de* $\mathcal{G}$, que está definido como

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) := \{x \in V \mid \nu_x(I_k) \geq k, \text{ para cada } k \geq 1\},$$

donde $\nu_x(I_k)$ denota el orden del ideal I_k en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V,x}$.

Recordemos aquí que el orden de un ideal I se define como el máximo entero n para el cual se cumple $I \subset \mathfrak{M}_x^n$, donde $\mathfrak{M}_x$ denota el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{V,x}$.

Esta forma de definir el lugar singular que acabamos de introducir, involucra todos los ideales que forman el álgebra de Rees, pero hay una forma más sencilla de describir este cerrado como se enuncia en la siguiente proposición. Esta manera alternativa de describir el lugar singular se hará en términos de un conjunto de generadores de $\mathcal{G}$.

Proposición 1.6. *Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees. Consideremos un conjunto abierto afín $U \subset V$, y sea $\mathcal{F} = \{f_1W^{n_1}, \ldots, f_sW^{n_s}\}$ un conjunto de generadores locales de $\mathcal{G}$ (como en la Observación* II.1.3*). Entonces,*

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \cap U = \bigcap_{1\leq i\leq s} \{x \in U \mid \mathrm{ord}_x(f_i) \geq n_i\}.$$

Demostración. Véase la Proposición 4.4 (2) en [57]. ◌

Definición 1.7. Dadas dos álgebras de Rees

$$\mathcal{G}_1 = \bigoplus_{n\geq 0} I_n^{(1)}W^n \ \text{ y } \ \mathcal{G}_2 = \bigoplus_{n\geq 0} I_n^{(2)}W^n,$$

vamos a definir una operación binaria entre ellas, que denotaremos por $\odot$, de la siguiente manera: En cada subconjunto abierto afín U, si localmente las álgebras están definidas por

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_V(U)[f_1W^{n_1}, \ldots, f_rW^{n_r}] \ \text{ y } \ \mathcal{G}_2 = \mathcal{O}_V(U)[g_1W^{m_1}, \ldots, g_sW^{m_s}],$$

entonces, el operador $\odot$ se define de forma local como

$$\mathcal{G}_1 \odot \mathcal{G}_2 = \mathcal{O}_V(U)[f_1W^{n_1}, \ldots, f_rW^{n_r}, g_1W^{m_1}, \ldots, g_sW^{m_s}].$$

Esta nueva álgebra $\mathcal{G}_1 \odot \mathcal{G}_2$ es la menor álgebra de Rees que contiene a $\mathcal{G}_1$ y a $\mathcal{G}_2$ simultáneamente.

1.8. Álgebras de Rees y transformaciones permisibles.

Definición 1.9. Fijemos un álgebra de Rees $\mathcal{G}$ sobre un esquema liso V. Una transformación monoidal de V a lo largo de un subesquema liso Y, digamos

$$V \xleftarrow{\pi} V_1$$

se dice que es una *transformación permisible* para $\mathcal{G}$ si

$$Y \subset \operatorname{Sing}(\mathcal{G}).$$

Observación 1.10. Fijada un álgebra de Rees $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} I_nW^n$, consideramos un centro permisible $Y \subset \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$ y la transformación monoidal de V a lo largo de este subesquema liso Y,

$$V \xleftarrow{\pi} V_1.$$

En este caso, para cada índice $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, existe un haz de ideales $I_n^{(1)} \subset \mathcal{O}_{V_1}$, tal que

$$I_n\mathcal{O}_{V_1} = I(H)^n I_n^{(1)},$$

donde denotamos por H la hipersuperficie excepcional definida por π, es decir, $H = \pi^{-1}(Y)$.

Definimos el *transformado* de $\mathcal{G}$ por π, como el álgebra de Rees definida por

$$\mathcal{G}_1 = \bigoplus_{n\geq 0} I_n^{(1)}W^n, \tag{II.1}$$

la denotaremos como

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\pi} & V_1 \\ \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 \end{array} \tag{II.2}$$

En términos de generadores locales, supongamos que para cada abierto afín U de V, se tiene que

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V(U)[f_1W^{n_1}, \ldots, f_sW^{n_s}].$$

Entonces, el transformado de $\mathcal{G}$ se expresa de forma local como

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V_1}(U_1)[f_1^{(1)}W^{n_1}, \ldots, f_s^{(1)}W^{n_s}],$$

donde $f_i^{(1)}$ es el transformado débil de f_i en V_1.

En general, podemos considerar sucesiones de transformaciones permisibles en lugar de una simple transformación. Las sucesiones de transformaciones permisibles las denotaremos por

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xleftarrow{\pi_1} & V_1 & \xleftarrow{\pi_2} & \dots & \xleftarrow{\pi_k} & V_k. \\ \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_k \end{array} \tag{II.3}$$

1.11. Álgebras de Rees y clausura entera.

Vamos a introducir ahora una relación de equivalencia entre álgebras de Rees. Esta noción que vamos a dar está muy ligada con la relación de equivalencia que Hironaka definió en el contexto de las parejas (J, b), donde $J \subset \mathcal{O}_V$ define un haz de ideales y b es un entero positivo. En la relación de equivalencia de Hironaka, dos parejas (J, b) y (J', b'), son *equivalentes* si y sólo si los ideales $J^{b'}$ y $(J')^b$ tienen la misma clausura entera. En este caso, la equivalencia de parejas se denota por $(J, b) \sim (J', b')$

Definición 1.12. Dadas dos álgebras de Rees $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ sobre el esquema liso V, diremos que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son *integralmente equivalentes* y lo denotaremos por

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{G}',$$

si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ tienen la misma clausura entera.

Proposición 1.13. *Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ dos álgebras de Rees integralmente equivalentes sobre V. Entonces,*

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \mathrm{Sing}(\mathcal{G}').$$

Demostración. Véase Proposición 4.4 (1) en [57]. ⥀

Observación 1.14. Obsérvese que la Proposición II.1.13 en particular implica que cada transformación monoidal $V \xleftarrow{\pi} V_1$ a lo largo de un centro $Y \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \mathrm{Sing}(\mathcal{G}')$ es permisible para ambas álgebras y define transformados $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_1'$ en V_1.

Proposición 1.15. *La equivalencia entera es compatible con las transformaciones monoidales permisibles. En otras palabras, sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ dos álgebras de Rees integralmente equivalentes sobre V y sea $V \xleftarrow{\pi} V_1$ una transformación monoidal permisible. Entonces,*

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_1',$$

es decir, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_1'$ son integralmente equivalentes en V_1.

Demostración. Véase la Proposición 4.4 (2) en [57]. ◌

Si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son *integralmente equivalentes* en V, el mismo resultado se tiene para restricciones a abiertos y para pull-backs de morfismos lisos de la forma $W \to V$.

Por otro lado, como $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}'_1$ son integralmente equivalentes, definen el mismo subconjunto cerrado en V_1 (el mismo lugar singular), y lo mismo sucede para sucesivas transformaciones monoidales, pull-backs por esquemas lisos, restricciones a abiertos y concatenaciones de cualquiera de los tres tipos de transformaciones.

1.16. Álgebras de Rees Diferenciales.

A continuación introduciremos y discutiremos una serie de propiedades de una clase de álgebras de Rees, las llamadas álgebras de Rees diferenciales. Estas álgebras tienen propiedades muy relevantes que se vinculan estrechamente con el contexto de singularidades en el que estamos trabajando

Definición 1.17. Fijado un esquema liso V sobre un cuerpo k, existe un haz localmente libre sobre V, definido para cada entero no negativo $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, llamado el *haz de operadores diferenciales de orden* s, y que se denota por $Diff^s_k$. Este haz tiene las siguientes propiedades:

(1) Para $s = 0$, $Diff^0_k = \mathcal{O}_V$.

(2) Para cada $s \geq 0$, se tiene la inclusión

$$Diff^s_k \subset Diff^{s+1}_k.$$

Dado un haz de ideales $J \subset \mathcal{O}_V$, se define una *extensión del haz de ideales* J, que denotaremos por $Diff^s_k(J)$ para cada $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de modo que sobre cualquier conjunto abierto afín U, se tiene que

$$Diff^s_k(J)(U) = \{D(f) \mid D \in Diff^s_k(U) \text{ y } f \in J(U)\},$$

es decir, $Diff^s_k(J)(U)$ se obtiene adjuntando a $J(U)$ los elementos de la forma $D(f)$ para cada $D \in Diff^s_k(U)$ y $f \in J(U)$.

Observación 1.18. Sea J un haz de ideales y denotemos como previamente por $Diff^s_k(J)$, ($s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), la extensión del haz de ideales. Entonces, se cumple:

(1) $Diff^0_k(J) = J$.

(2) Para cualquier $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se tiene la siguiente inclusión de haces de ideales en $\mathcal{O}_V$,

$$Diff_k^s(J) \subset Diff_k^{s+1}(J).$$

Ahora, la definición de álgebras de Rees diferenciales surge de una manera muy natural, simplemente con la precaución de tener en cuenta el peso de los ideales.

Definición 1.19. Sea V un esquema liso. Diremos que un álgebra de Rees $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$, es un *álgebra de Rees diferencial absoluta* o simplemente un *álgebra diferencial*, si:

(i) Para cada entero no negativo $n \geq 0$, se da la inclusión

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

(ii) Sea $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos afines de V. Para cada operador diferencial $D \in Diff_k^r(U_i)$, y para cada elemento $h \in I_n(U_i)$, se cumple

$$D(h) \in I_{n-r}(U_i) \quad \text{si } n \geq r.$$

Observación 1.20. La condición (ii) de la Definición II.1.19 se puede reformular como:

(ii') Para cada entero positivo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y para cada entero $0 \leq r \leq n$, se cumple la inclusión

$$Diff_k^r(I_n) \subset I_{n-r}.$$

1.21. Descripción local de los operadores diferenciales.

Sea V un esquema liso de dimensión n sobre un cuerpo k. Dado un punto cerrado $x \in V$, se puede considerar un sistema regular de parámetros $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$. Sea $\mathfrak{M}_x$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_{V,x}$. Si denotamos por k' el cuerpo residual de k (una extensión finita de k), el completado $\mathfrak{M}_x$-ádico de $\mathcal{O}_{V,x}$ está definido de forma local como

$$\widehat{\mathcal{O}}_{V,x} = k'[[x_1, \ldots, x_n]].$$

A nivel de completados, podemos considerar el *morfismo de Taylor*, un homomorfismo de anillos k'-lineal definido como

$$\begin{aligned} Tay : k'[[x_1, \ldots, x_n]] &\longrightarrow k'[[x_1, \ldots, x_n, T_1, \ldots, T_n]] \\ x_i &\longmapsto x_i + T_i \end{aligned}$$

donde $T_1, \ldots, T_n$ son n nuevas variables independientes.

Para cualquier elemento $f \in k'[[x_1, \ldots, x_n]]$, podemos considerar su imagen por el morfismo Tay:

$$Tay(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} g_\alpha T^\alpha,$$

donde $g_\alpha \in k'[[x_1, \ldots, x_n]]$.

A partir de esta igualdad se definen los operadores diferenciales, que aparecen en el ámbito de las series de potencias formales: Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se define de manera formal

$$\Delta^\alpha(f) = g_\alpha.$$

Estos operadores Δ^α están definidos en el anillo de series formales, pero si consideramos la inclusión natural de $\mathcal{O}_{V,x}$ en su completado, (i.e, $\mathcal{O}_{V,x} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$) se puede demostrar que

$$\Delta^\alpha(\mathcal{O}_{V,x}) \subset \mathcal{O}_{V,x}.$$

De hecho, el conjunto

$$\{\Delta^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n,\ 0 \leq |\alpha| \leq r\}$$

genera $Diff_k^r$ localmente en x. Para más detalles al respecto, véase [26] Teorema 16.11.2.

En el siguiente Teorema se muestra cómo las álgebras de Rees diferenciales se relacionan con las álgebras de Rees en general.

Teorema 1.22. *Sea V un esquema liso y sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees sobre V. Entonces, existe una mínima álgebra de Rees diferencial que denotaremos por $G(\mathcal{G})$, tal que*

(i) $\mathcal{G} \subset G(\mathcal{G})$.

(ii) *Si $\mathcal{G} \subset \widetilde{\mathcal{G}}$ y $\widetilde{\mathcal{G}}$ es un álgebra de Rees diferencial, entonces $G(\mathcal{G}) \subset \widetilde{\mathcal{G}}$.*

Más aún, sea $x \in V$ un punto cerrado y consideremos un conjunto local de generadores de $\mathcal{G}$ en un entorno de x, $\mathcal{F} = \{f_1 W^{n_1}, \ldots, f_s W^{n_s}\}$. Entonces,

$$\mathcal{F}' = \{\Delta^\alpha(f_i) W^{n'_i - \alpha} \mid f_i W^{n_i} \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \textit{con } 0 \leq |\alpha| < n'_i \leq n_i,\ \textit{para } 1 \leq i \leq s\} \quad \text{(II.4)}$$

es un conjunto de generadores de $G(\mathcal{G})$ localmente en x.

Demostración. Véase el Teorema 3.4. de [57]. ◌

Observación 1.23. Po el Teorema II.1.22, dada un álgebra de Rees que es mínima con la propiedad de contener a $\mathcal{G}$ y de ser diferencial. Denotaremos a esta álgebra por $G(\mathcal{G})$. Diremos en este caso que $G(\mathcal{G})$ es una G-extensión de $\mathcal{G}$.

Observación 1.24. Teniendo en cuenta la descripción local de $\mathcal{G}$ y $G(\mathcal{G})$, se puede comprobar que

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}) = \operatorname{Sing}(G(\mathcal{G})).$$

Veámoslo. A partir de la inclusión $\mathcal{G} \subset G(\mathcal{G})$, se deduce que siempre se cumple la inclusión

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}) \supset \operatorname{Sing}(G(\mathcal{G})).$$

La otra inclusión se prueba observando que si $\nu_x(g_{n_i}) \geq n_i$, entonces $\Delta^\alpha(g_{n_i})$ tiene orden $n_i - |\alpha|$ en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V,x}$.

El siguiente Lema debido a Jean Giraud, relaciona las G-extensiones de álgebras con las transformaciones monoidales permisibles.

Lema 1.25 (J. Giraud). *Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees sobre un esquema liso V, y sea $V \xleftarrow{\pi} V_1$ una transformación monoidal permisible para $\mathcal{G}$. Denotemos por $\mathcal{G}_1$ el transformado de $\mathcal{G}$ y por $G(\mathcal{G})_1$ el transformado de $G(\mathcal{G})$. Entonces, se cumplen las siguientes dos propiedades*

1. $\mathcal{G}_1 \subset G(\mathcal{G})_1$.
2. $G(\mathcal{G}_1) = G\big(G(\mathcal{G})_1\big)$.

Demostración. Véase el Teorema 4.1. de [23]. ◌

Observación 1.26. Si aplicamos el Teorema II.1.22 junto con el Lema de Giraud, entonces se obtienen las siguientes inclusiones

$$\mathcal{G}_1 \subset G(\mathcal{G})_1 \subset G(\mathcal{G}_1).$$

En particular, por la Observación II.1.24, se deduce que

$$\operatorname{Sing}(G(\mathcal{G})_1) = \operatorname{Sing}(\mathcal{G}_1).$$

Pero, más aún, estos mismos argumentos se pueden extender a una sucesión de transformaciones monoidales permisibles de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_{k-1} & & \mathcal{G}_k \\
V & \xleftarrow{\pi_1} & V_1 & \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{k-1}} & V_{k-1} & \xleftarrow{\pi_k} & V_k \\
Y & & Y_1 & & Y_{k-1} & &
\end{array}$$

y en este caso, de nuevo

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_k) = \mathrm{Sing}(G(\mathcal{G})_k).$$

1.27. Álgebras de Rees con estructura diferencial relativa.

Sea $V \xrightarrow{\phi} V'$ un morfismo de liso de esquemas lisos. Denotemos por $Diff_{\phi}^{r}(V)$ el haz localmente libre de operadores diferenciales relativos (a ϕ) de orden r.

Definición 1.28. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus I_{n\geq 0}W^n$ un álgebra de Rees sobre un esquema liso V. Diremos que $\mathcal{G}$ es un *álgebra de Rees diferencial relativa* (respecto de ϕ) si se cumple que:

(i) Para todo entero positivo $n \geq 0$, se da la inclusión de ideales

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

(ii) Para un recubrimiento adecuado de V por subconjuntos abiertos afines, $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$, y para cada operador diferencial $D \in Diff_{\phi}^{r}(U_i)$, y elemento $h \in I_n(U_i)$, se cumple que

$$D(h) \in I_{n-r}(U_i) \text{ si } n \geq r.$$

Observación 1.29. Como observamos en la Definición II.1.19, la condición (ii) de la Definición II.1.28 se puede reformular como

(ii') Para cada entero positivo $n \geq 0$, y para cada entero $0 \leq r \leq n$, se cumple que

$$Diff_{\phi}^{r}(I_n) \subset I_{n-r}.$$

Observación 1.30. Como

$$Diff_{\phi}^{r}(V) \subset Diff_{k}^{r}(V),$$

entonces cualquier álgebra diferencial es en particular un álgebra diferencial relativa a ϕ.

Observación 1.31. Análogamente a lo enunciado en el Teorema II.1.22, cualquier álgebra de Rees $\mathcal{G}$ se puede extender a un álgebra de Rees que sea mínima con la propiedad de contener a $\mathcal{G}$ y de ser diferencial relativa a ϕ.

Dado un ideal $J \subset \mathcal{O}_V$ y un morfismo liso $V \xrightarrow{\phi} V'$, podemos considerar la extensión natural de ideales dada por $J \subset Diff_{\phi}^{r}(J)$ para cada $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Esta extensión se define en cada subconjunto abierto U de V como

$$Diff_{\phi}^{r}(J)(U) = \{D(f) \mid f \in J(U), D \in Diff_{\phi}^{r}(U)\}.$$

Capítulo III

Álgebras de eliminación

En este Capítulo, introduciremos la noción de álgebras de eliminación, definidas en [56]. Estas álgebras son la herramienta básica para iniciar una forma alternativa de inducción en el ámbito de resolución de singularidades. Está basada en la eliminación de variables, en lugar de la clásica restricción a hipersuperficies lisas.

1. Álgebra de eliminación universal y su especialización

Comenzaremos definiendo las álgebras de eliminación en el contexto universal, para posteriormente introducir el modo mediante el cual se especializa la información obtenida en el contexto universal.

1.1. Álgebra de eliminación universal.

Sea S un anillo y consideremos el anillo de polinomios $S[Z]$. Sea $f(Z) \in S[Z]$ un polinomio mónico de la forma

$$f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

donde Z es una variable independiente. Como se expone en [56], las álgebras de eliminación surgen de una manera muy natural cuando buscamos ecuaciones en los coeficientes del polinomio que sean invariantes por cambios del tipo $Z \mapsto uZ + s$, donde $\alpha, u \in S$ y u es una unidad de S. Por esta razón, a continuación estudiaremos algunos aspectos de teoría de invariantes y eliminación, comenzando por el estudio del caso universal.

Definimos $F_n(Z) = (Z - Y_1)(Z - Y_2)\dots(Z - Y_n)$ como el *polinomio universal de grado* n en el anillo de polinomios de $n+1$ variables $k[Y_1, \dots, Y_n, Z]$. El grupo de permutaciones de n elementos, $\mathbb{S}_n$, actúa en el anillo $k[Y_1, \dots, Y_n]$ permutando los índices de las variables $Y_1, \dots, Y_n$. Esta acción se puede extender al anillo $k[Y_1, \dots, Y_n, Z]$ simplemente fijando la variable Z.

El anillo de invariantes por la acción del grupo de permutaciones $\mathbb{S}_n$, denotémoslo por $k[Y_1, \dots, Y_n]^{\mathbb{S}_n}$, está generado como k-algebra, por las funciones simétricas elementales de orden i, denotémoslas por s_i con $1 \leq i \leq n$.

Estas funciones simétricas están definidas como:

$$\begin{cases} s_1 := Y_1 + \cdots + Y_n \\ s_2 := \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} Y_iY_j \\ \vdots \\ s_n := Y_1Y_2\dots Y_n \end{cases}$$

Esto es, $k[Y_1,\dots,Y_n]^{\mathbb{S}_n} = k[s_1,\dots,s_n]$ y

$$k[Y_1,\dots,Y_n,Z]^{\mathbb{S}_n} = k[s_1,\dots,s_n][Z].$$

Como el polinomio $F_n(Z) = (Z-Y_1)\dots(Z-Y_n)$ es invariante por la acción de cualquier elemento de $\mathbb{S}_n$, entonces se deduce que

$$F_n(Z) = (Z-Y_1)\dots(Z-Y_n) \in k[s_1,\dots,s_n][Z].$$

De hecho,

$$F_n(Z) = (Z-Y_1)\dots(Z-Y_n) = Z^n - s_1Z^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n.$$

Sea S una k-álgebra y fijemos $f(Z) = Z^n + a_1Z^{n-1} + \cdots + a_n$, un polinomio mónico de grado n en $S[Z]$. Entonces el morfismo de base definido por

$$\begin{aligned} k[s_1,\dots,s_n] &\longrightarrow S \\ s_i &\longmapsto (-1)^i \cdot a_i \end{aligned} \tag{III.1}$$

induce un morfismo

$$k[s_1,\dots,s_n][Z] \longrightarrow S[Z]$$

que envía $F_n(Z)$ en $f(Z)$.

Por tanto, queda justificado un estudio minucioso en el contexto universal, ya que propiedades en este contexto se podrán traducir de manera inmediata en propiedades de un polinomio fijado $f(Z) \in S[Z]$.

Como el grupo de permutaciones $\mathbb{S}_n$ actúa de forma lineal sobre el anillo de polinomios $k[Y_1,\dots,Y_n,Z]$, y por tanto esta acción preserva la graduación del anillo. Podemos considerar entonces el anillo de invariantes $k[s_1,\dots,s_n][Z]$ como un subanillo graduado (donde la graduación definida es la heredada de la que teníamos en $k[Y_1,\dots,Y_n,Z]$).

El grupo $\mathbb{S}_n$ también actúa de forma lineal en el subanillo graduado $k[Y_i-Y_j]_{1\leq i,j,\leq n} \subset k[Y_1,\dots,Y_n]$, obteniéndose así una inclusión de subanillos graduados definida como

$$k[Y_i-Y_j]^{\mathbb{S}_n}_{1\leq i,j,\leq n} \subset k[Y_1,\dots,Y_n]^{\mathbb{S}_n}.$$

Supongamos que

$$k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n} = k[H_{n_1}, \ldots, H_{n_r}],$$

donde los H_{n_i}son polinomios homogéneos de grado n_i, $1 \leq i \leq r$. Entonces cada H_{n_i} es homogéneo con pesos de grado n_i en $k[s_1, \ldots, s_n]$, donde suponemos que cada s_i tiene grado i, esto es,

$$H_{n_i} = H_{n_i}(s_1, \ldots, s_n).$$

Al álgebra graduada $k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}$ la denominaremos *álgebra de eliminación universal.*

Ahora bien, cualquier elemento del anillo $k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}$ induce, para cada polinomio

$$f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$$

en $S[Z]$, y cada cambio de base como el dado en (III.1), una función en los coeficientes a_i que será invariante por cambios de variables de la forma $Z \mapsto Z - s$, $s \in S$. Es decir, obtenemos funciones en los coeficientes

$$h_{n_i} = h_{n_i}(a_1, \ldots, a_n)$$

que son invariantes por cambios de variables de la forma $Z \mapsto Z - s$, ya que provienen de elementos invariantes por translaciones en el contexto universal.

En general, podemos considerar cambios de variables que tengan una forma más general, es decir, querremos considerar cambios de la forma $Z \mapsto uZ - s$, donde $s, u \in S$ y u es una unidad. Resta por estudiar qué sucede con los cambios de la forma $Z \mapsto uZ$.

El polinomio $f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$ después de un cambio de variables dado por $Z \mapsto uZ$, está definido como

$$u^n Z^n + a_1 u^{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

multiplicando por la unidad $u' = (u^{-1})^n$ obtenemos el polinomio

$$u' g(z) = Z^n + u' a_1 Z^{n-1} + \cdots + (u')^n a_n,$$

que salvo producto por unidad, podemos considerar que es un polinomio mónico de grado n. Tenemos ahora que las funciones h_{n_i} anteriormente calculadas, son ahora de la forma

$$(u^{-1})^{n_i} h_{n_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Esta última afirmación se deduce a partir de la estructura ponderada de los h_{n_i}. Véamoslo. Denotemos $b_i = (u^{-1})^i a_i$ para $i = 1, \ldots, n$ a los coeficientes de $u^{-1}g(z)$. Por tanto,

$$h_{n_i} = h_{n_i}(a_1, \ldots, a_n) = h_{n_i}(ub_1, \ldots, u^n b_n)$$

Al ser h_{n_i} un polinomio homogéneo con pesos de grado n_i donde cada $u^j a_j$ tiene peso j, se deduce que

$$h_{n_i}(b_1, \ldots, b_n) = (u^{-1})^{n_i} h_{n_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Estas funciones no son invariantes por cambios generales, sin embargo, en nuestro planteamiento estamos considerando álgebras graduadas. En particular, en cada peso $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tenemos un ideal J_n que está generado por polinomios h que son homogéneos ponderados de grado n y tienen coeficientes en S, es decir, $H_n(V_1, \ldots, V_n)$, donde cada variable V_j tiene peso n_j y

$$h = H_n(h_{n_1}, \ldots, h_{n_r}).$$

Así, cada ideal J_n del álgebra de eliminación es invariante por cambios de variables de la forma $Z \mapsto uZ + s$ incluso cuando las funciones h_{n_i} no lo son. Podemos así decir, que es suficiente con considerar los cambios de variables particulares dados por $Z \mapsto Z + s$.

1.2. El morfismo Tay en el ámbito universal.

En un contexto universal, podemos definir, como ya hicimos en II.1.21, el morfismo de Taylor, Tay. Gracias a esta definición universal, vamos a poder vincular nuestra teoría de eliminación con los operadores diferenciales.

Sea S una k-álgebra y consideremos el S-homomorfismo

$$\begin{aligned} Tay : S[Z] &\longrightarrow S[Z,T] \\ Z &\longmapsto Z + T \end{aligned}$$

donde T es una variable independiente.

Para un polinomio $f(Z) \in S[Z]$, podemos considerar su imagen mediante el morfismo Tay

$$Tay(f(Z)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} g_\alpha(Z) T^\alpha,$$

con $g_\alpha(Z) \in S[Z]$. En este caso, para cada $\alpha \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Delta^{(\alpha)}(f(Z)) = g_\alpha(Z).$$

Observación 1.3. Sea $F_n(Z) = (Z - Y_1)\cdots(Z - Y_n) \in k[Y_1, \dots, Y_n][Z]$ el polinomio universal de orden n. Podemos evaluar $F(Z + T)(= Tay(F(Z))$ y entonces,

$$F_n(T + Z) = (T + (Z - Y_1)) \cdot (T + (Z - Y_2)) \cdots (T + (Z - Y_n)).$$

Si consideramos ahora los coeficientes de este polinomio en la nueva variable T, se observa que son los polinomios simétricos evaluados en el elemento $(Z - Y_1, \dots, Z - Y_n)$, es decir,

$$s_r(Z - Y_1, \dots, Z - Y_n),$$

para cada $1 \leq r \leq n$. Deducimos así que

$$\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z)) = (-1)^{n-\alpha} s_{n-\alpha}(Z - Y_1, Z - Y_2, \dots, Z - Y_n), \qquad \text{(III.2)}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ y $1 \leq \alpha \leq n - 1$.

Además, el grupo de permutaciones $\mathbb{S}_n$ actúa en el subanillo graduado

$$k[Z - Y_1, \dots Z - Y_n](\subset k[Y_1, \dots, Y_n, Z])$$

definiendo $\sigma(Z) = Z$ para cada permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Este grupo actúa preservando la estructura graduada. Deducimos entonces que

$$k[Z - Y_1, \dots, Z - Y_n]^{\mathbb{S}_n} = k[F_n(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))]_{1 \leq \alpha \leq n-1}, \qquad \text{(III.3)}$$

donde cada $\Delta^{(\alpha)}(F_n((Z))$ es homogéneo de grado $n - \alpha$ $(1 \leq \alpha \leq n - 1)$.

Por otro lado, como $Y_i - Y_j = (Z - Y_j) - (Z - Y_i)$, entonces a partir de la inclusión definida por

$$k[Y_i - Y_j]_{1 \leq i,j, \leq n} \subset k[Z - Y_1, \dots Z - Y_n],$$

se obtiene una nueva inclusión de anillos graduados

$$k[H_{n_1}, \dots, H_{n_r}] = k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n} \subset k[F_n(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))]_{1 \leq \alpha \leq n-1}, \qquad \text{(III.4)}$$

y así, cada elemento H_{n_i} en $k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}$ es también un polinomio homogéneo ponderado en $k[F_n(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))]_{1 \leq \alpha \leq n-1}$.

1.4. Especialización del álgebra de eliminación.

Queremos ahora aprovechar la construcción que hemos realizado en III.1.1, dentro de un ámbito universal, para asignar a cada polinomio mónico

$$f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$$

de grado n en el anillo $S[Z]$, un álgebra de Rees que será una subálgebra del anillo $S[Z][W]$ (i.e. una subálgebra finitamente generada de $S[Z][W]$ donde W denota una variable auxiliar muda).

De una forma más precisa, vamos a asociar a un subanillo graduado en $k[s_1,\dots,s_n][Z]$ un subanillo en $S[Z][W]$, de tal forma que cada polinomio homogéneo ponderado de grado m, G, en el anillo $k[s_1,\dots,s_n][Z]$, se corresponderá con un elemento de la forma gW^m, donde $g \in S[Z]$. Nótese que la variable muda W sirve para recordar el grado del polinomio después de especializar.

Dado un polinomio mónico de grado n, $f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$, en $S[Z]$, definimos un homomorfismo de k-álgebra en $S[Z][W]$ mediante

$$\begin{aligned} k[s_1,\dots,s_n][Z] &\longrightarrow S[Z][W] \\ s_i &\longmapsto (-1)^i \cdot a_i W^i \\ Z &\longmapsto ZW. \end{aligned}$$

Cualquier subanillo graduado en el anillo $k[s_1,\dots,s_n][Z]$ induce ahora una subálgebra graduada en $S[Z][W]$.

Observación 1.5. Los elementos $\Delta^{(\alpha)}(f(Z))W^{n-\alpha}$ que aparecen en (III.5) y que se obtienen por especialización de los elementos $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))$ mediante el cambio de base, son exactamente los operadores diferenciales relativos aplicados a $f(Z)$ ubicados en peso $n-\alpha$.

Consideremos el morfismo de Taylor definido como

$$\begin{aligned} Tay : k[s_1,\dots,s_n][Z] &\longrightarrow k[s_1,\dots,s_n][Z,T] \\ Z &\longmapsto Z+T \end{aligned}$$

y el morfismo de cambio de base

$$k[s_1,\dots,s_n] \longrightarrow S[W]$$

definido como previamente. Por el buen comportamiento de los operadores diferenciales con el cambio de base y por III.1.2, se deduce que las diferenciales relativas $\Delta^{(\alpha)}(f(Z))W^{n-\alpha}$ se obtienen por especialización a partir de las diferenciales relativas universales, $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))W^{n-\alpha}$.

A partir de la inclusión definida por (III.4), se obtiene una nueva inclusión

$$S[h_{n_1}W^{n_1},\dots,h_{n_s}W^{n_s}] \subset S[f(Z)W^n, \Delta^{(\alpha)}(f(Z))W^{n-\alpha}]_{1\le\alpha\le n-1}. \quad \text{(III.5)}$$

Es importante observar que el anillo $k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}_{1\le i,j\le n}$ es libre de la variable Z, por lo tanto al especializar, también obtenemos que

$$S[h_{n_1}W^{n_1},\dots,h_{n_s}W^{n_s}] \subset S[W],$$

es una subálgebra libre de la variable Z. Por esta razón, al álgebra dada por $S[h_{n_1}W^{n_1},\dots,h_{n_s}W^{n_s}]$ la denominaremos *álgebra de eliminación.*

1.6. Álgebra de eliminación universal y transformaciones.

Consideremos el polinomio universal de grado n dado por

$$F_n(Z) = (Z - Y_1) \cdot (Z - Y_2) \cdots (Z - Y_n) \in k[Y_1, \ldots, Y_n][Z, V]$$

donde ahora V es una nueva variable. Definamos de manera formal

$$F'_n\Big(\frac{Z}{V}\Big) := \Big(\frac{1}{V}\Big)^n F_n(Z) = \Big(\frac{Z}{V} - \frac{Y_1}{V}\Big) \cdot \Big(\frac{Z}{V} - \frac{Y_2}{V}\Big) \cdots \Big(\frac{Z}{V} - \frac{Y_n}{V}\Big)$$

un polinomio en $k[Y_1, \ldots, Y_n][V, V^{-1}][Z]$. De hecho, podemos pensar que $F'_n(\frac{Z}{V})$ es un polinomio mónico en el anillo $k[Y_1, \ldots, Y_n][V, V^{-1}][\frac{Z}{V}]$, o es un polinomio mónico en el subanillo $k[\frac{Y_1}{V}, \frac{Y_2}{V}, \ldots, \frac{Y_n}{V}][\frac{Z}{V}]$.

Denotemos por $\Delta_1^{(\alpha)}$ el operador diferencial relativo de orden $\alpha \in \mathbb{N}$ en el anillo $k[\frac{Y_1}{V}, \frac{Y_2}{V}, \ldots, \frac{Y_n}{V}][\frac{Z}{V}]$ (es relativo al subanillo $k[\frac{Y_1}{V}, \frac{Y_2}{V}, \ldots, \frac{Y_n}{V}]$). A partir de (III.2) se deduce que

$$\Delta_1^{(\alpha)}\Big(F'_n\Big(\frac{Z}{V}\Big)\Big) = \Big(\frac{1}{V}\Big)^{n-\alpha} \cdot \Delta^{(\alpha)}(F_n(Z)). \tag{III.6}$$

Sea $\mathbb{S}_n$ el grupo de permutaciones de n elementos. Este grupo $\mathbb{S}_n$ actúa en $k[Y_1, \ldots, Y_n][V, V^{-1}][Z]$ permutando las variables Y_i y fijando tanto V, como V^{-1} y como Z. De esta manera, $\mathbb{S}_n$ también actúa permutando las variables de $k[\frac{Y_1}{V}, \frac{Y_2}{V}, \ldots, \frac{Y_n}{V}]$, y de manera trivial en $\frac{Z}{V}$. Por tanto, podemos considerar

$$k\Big[\frac{Y_i}{V} - \frac{Y_j}{V}\Big]^{\mathbb{S}_n} = k[H^1_{n_1}, \ldots, H^1_{n_r}],$$

donde, por el modo en que actúa $\mathbb{S}_n$ en $k\big[\frac{Y_i}{V} - \frac{Y_j}{V}\big]$, se deduce que

$$H^1_{n_i} = \frac{1}{V^{n_i}} \cdot H_{n_i} \quad \text{con } i = 1, \ldots, r \tag{III.7}$$

para los elementos H_{n_i} definidos como en (III.4).

1.7. Álgebra de eliminación universal de dos polinomios.

En III.1.1 hemos definido un álgebra de eliminación asociada a un polinomio universal. Este caso particular (definido para un único polinomio) tiene una extensión muy natural al caso general en el que se trate con varios polinomios. Por simplicidad en la exposición, vamos a tratar aquí el caso particular en el que se consideren dos polinomios, pero los argumentos introducidos son válidos para el caso general.

Fijamos dos enteros positivos, r, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tales que $r + s = n$ y sean $F_r(Z) = (Z-Y_1) \ldots (Z-Y_r)$ y $F_s(Z) = (Z-Y_{r+1}) \ldots (Z-Y_n)$ dos polinomios universales de grado r y s respectivamente. Nótese que $F_r(Z) \cdot F_s(Z) = F_n(Z)$.

El grupo de permutaciones $\mathbb{S}_r$ actúa en $k[Y_1, \ldots, Y_r]$ y el grupo $\mathbb{S}_s$ actúa en $k[Y_{r+1}, \ldots, Y_n]$. Definimos

$$k[H'_{m_1}, \ldots, H'_{m_{r,s}}] := k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}_{1 \leq i,j \leq n}$$

como *el álgebra de eliminación universal de dos polinomios*.

La inclusión de grupos dada por $\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s \subset \mathbb{S}_n$, induce la inclusión de anillos

$$k[H_{m_1}, \ldots, H_{m_n}] := k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}_{1 \leq i,j \leq n} \subset k[H'_{m_1}, \ldots, H'_{m_{r,s}}] = k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_n}.$$

Esta inclusión es una extensión finita de álgebras graduadas. Por otro lado, como sucedía en el caso de un polinomio (véase (III.3)), se puede ver que se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} &k[Z - Y_1, \ldots, Z - Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s} \\ &\quad = k[F_r(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_r(Z)), F_s(Z), \Delta^{(\gamma)}(F_s(Z))]_{1 \leq \alpha \leq r-1,\ 1 \leq \gamma \leq s-1}. \end{aligned} \tag{III.8}$$

A partir de la inclusión de los grupos finitos $\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s \subset \mathbb{S}_n$, se deduce que existe una inclusión de álgebra invariantes:

$$\begin{aligned} &k[F_n(Z), \Delta^{(j)}(F_n(Z))]_{1 \leq j \leq n-1} \\ &\qquad \subset k[F_r(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_r(Z)), F_s(Z), \Delta^{(\gamma)}(F_s(Z))]_{1 \leq \alpha \leq r-1,\ 1 \leq \gamma \leq s-1}. \end{aligned}$$

que de hecho es una extensión finita de álgebras graduadas.

Como ya hemos observado anteriormente, $\Delta^{(\alpha)}(F_r(Z))$ es homogéneo de grado $r - \alpha$ para $\alpha = 1, \ldots, n-1$. Además, $k[Z - Y_1, \ldots, Z - Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}$ es un subanillo graduado de $k[Y_1, \ldots, Y_n, Z]$. De hecho, existe una inclusión natural dada por

$$\begin{aligned} &k[H'_{m_1}, \ldots, H'_{m_n}] \\ &\quad \subset k[F_r(Z), \Delta^{(\alpha)}(F_r(Z)), F_s(Z), \Delta^{(\gamma)}(F_s(Z))]_{1 \leq \alpha \leq r-1,\ 1 \leq \gamma \leq s-1} \end{aligned} \tag{III.9}$$

que se deduce de la inclusión definida por

$$k[Y_i - Y_j]_{1 \leq i,j \leq n} \subset k[Z - Y_1, \ldots, Z - Y_n].$$

Los anillos de invariantes

$$k[Y_1, \ldots, Y_r]^{\mathbb{S}_r} = k[v_1, \ldots, v_r], \quad \text{y} \quad k[Y_{r+1}, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_s} = k[w_1, \ldots, w_s]$$

son subanillos graduados en $k[Y_1, \ldots, Y_n]$, con $F_r(Z) \in k[v_1, \ldots, v_r][Z]$, $F_s(Z) \in k[w_1, \ldots, w_r][Z]$. Además, existe una inclusión

$$k[H'_{m_1}, \ldots, H'_{m_{r,s}}] \subset k[v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s]$$

que surge de la inclusión $k[Y_i - Y_j] \subset k[Y_1, \ldots, Y_n]$. En particular, cada H'_j es también un polinomio homogéneo ponderado en los *coeficientes universales* $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$.

1.8. Especialización de dos polinomios.

La discusión previa que hemos realizado en el caso de dos polinomios universales (véase III.1.7) se puede extender al caso general en el que se considere un número arbitrario de polinomios. Las álgebras universales especializan en subálgebras de la forma

$$S[Z][f_i(Z)W^{n_i}, \Delta^{(\alpha_i)}(f_i(Z))W^{n_i-\alpha_i}]_{1\leq\alpha_i\leq n_i-1,\ 1\leq i\leq r}, \tag{III.10}$$

de la misma forma que considerábamos en III.1.4, donde ahora los $f_i(Z)$ son polinomios mónicos de la forma

$$f_i(Z) = Z^{n_i} + a_{1,i}Z^{n_i-1} + \cdots + a_{n_i,i}$$

con $a_{j,i} \in S$ donde $1 \leq j \leq n_i$ y para $i = 1, \ldots, r$.

La misma especialización, aplicada a las álgebras de eliminación universal (libres de la variable Z), definirá ahora álgebras de la forma

$$\mathcal{R} := S[h^{(j)}_{n_1,\ldots,n_r}W^{N^{(j)}_{n_1,\ldots,n_r}}]_{1\leq j\leq R_{n_1,\ldots,n_r}} \subset S[W], \tag{III.11}$$

para ciertos enteros $R_{n_1,\ldots,n_r}$.

Una propiedad importante de la especialización que definimos en III.1.4 es su compatibilidad con las extensiones finitas de álgebras graduadas. Así, en la situación en la que tratamos el caso de dos polinomios (véase III.1.7), podemos concluir que si $f_n(Z) \in S[Z]$ es un polinomio mónico de grado n que factoriza como producto de dos polinomios mónicos, $f_n(Z) = f_r(Z)f_s(Z)$, entonces existe una inclusión natural y finita de anillos graduados

$$\begin{aligned}&S[Z][f_n(Z)W^n, \Delta^{(j)}(f_n(Z))W^{n-j}]_{1\leq j\leq n-1}\\ &\quad\subset S[Z][\Delta^{(\alpha)}(f_r(Z))W^{r-\alpha}, f_s(Z), \Delta^{(\gamma)}(f_s(Z))W^{s-\gamma}]_{1\leq\alpha\leq r-1,\ 1\leq\gamma\leq s-1},\end{aligned}$$

(como subálgebras de $S[Z][W]$).

De manera similar, una extensión finita de subálgebras graduadas de $S[W]$ está definida por la especialización de sus correspondientes álgebras de eliminación. Podemos extender este argumento de manera análoga al caso en el que consideremos más de dos polinomios.

2. Cálculo explícito del álgebra de eliminación. Ejemplos

2.1. En la Sección anterior se introdujo la noción de álgebra de eliminación. Su interpretación como álgebra de invariantes en una dimensión menor o como la menor subálgebra libre de la variable a eliminar es muy útil en muchos contextos. Pero, en general, será necesario describir un método para su cálculo.

En esta Sección, nos centraremos en dar una forma explícita de calcular estas álgebras de eliminación. Al final de la sección, se motivará lo anteriormente expuesto con una serie de ejemplos.

2.2. Para realizar este estudio de las álgebras de eliminación, definiremos un subanillo graduado de $R_n := k[Y_i - Y_1]^{\mathbb{S}_n}_{2\leq i\leq n}$ cuya clausura entera será el propio R_n.

Observación 2.3. R_n es un subanillo graduado normal.

Esta afirmación se deduce del hecho de que R_n es el subanillo de invariantes por la acción de $\mathbb{S}_n$ de $k[Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_1]$ como subanillo de $k[Y_1, \dots, Y_n]$, es decir,

$$R_n = k[s_1, \dots, s_n] \cap k[Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_1].$$

Ahora bien, el subanillo de invariantes $k[s_1, \dots, s_n] = k[Y_1, \dots, Y_n]^{\mathbb{S}_n}$ es un anillo normal. Por otra parte $k[Y_2 - Y_1, \dots, Y_n - Y_1]$ es también normal (es isomorfo a un anillo de polinomios). Por tanto, se deduce que R_n es normal al ser intersección de dos anillos normales.

Consideremos ahora el anillo definido por $k[s_1, \dots, s_n][Z]/\langle F_n(Z)\rangle$. Por la correspondencia de Galois, existe un isomorfismo natural

$$k[s_1, \dots, s_n][Z]/\langle F_n(Z)\rangle \cong k[s_1, \dots, s_n][Y_j],$$

para cualquier $j = 1, \dots, n$.

Como $F_n(Z) = Z^n - s_1 Z^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$ es mónico de grado n, el anillo $k[s_1, \dots, s_n][Y_1]$ ($\cong k[s_1, \dots, s_n][Z]/\langle F_n(Z)\rangle$) es un $k[s_1, \dots, s_n]$-módulo libre de rango n con una base que se puede identificar con $\{1, \overline{Z}, \dots, \overline{Z}^{n-1}\}$ (donde por $\overline{Z}$ denotamos la clase de Z en $k[s_1, \dots, s_n][Z]/\langle F_n(Z)\rangle$).

Dado un elemento $\theta \in k[s_1, \dots, s_n][Y_1]$, podemos considerar la multiplicación por θ, esta operación define un endomorfismo, ϕ_θ:

$$\begin{aligned} k[s_1, \dots, s_n][Y_1] &\xrightarrow{\phi_\theta} k[s_1, \dots, s_n][Y_1] \\ \alpha &\longmapsto \phi_\theta(\alpha) := \alpha \cdot \theta \end{aligned}$$

cuyo polinomio característico es independiente de la base elegida y tiene una expresión de la forma

$$\psi_\theta(V) := V^n + h_1 V^{n-1} + \cdots + h_n \in k[s_1, \dots, s_n][V].$$

Lema 2.4. *Si* $\theta = a_0+a_1Y_1+\cdots+a_{n-1}Y_1^{n-1} \in k[s_1,\ldots,s_n][Y_1]$ *(es decir,* θ *se identifica con* $a_0+a_1\overline{Z}+\cdots+a_{n-1}\overline{Z}^{n-1}$*), entonces el polinomio característico de* ϕ_θ *es de la forma*

$$\psi_\theta(V) = \prod_{1\leq j\leq n} \big(V-(a_0+a_1Y_j+\cdots+a_{n-1}Y_j^{n-1})\big).$$

Demostración. Véase el Lema 1.19. de [56]. ⥀

Observación 2.5. El Lema anterior implica que salvo signo, los coeficientes h_i del polinomio característico $\psi_\theta(V)$ son los polinomios simétricos s_i evaluados en el elemento $(a_0+a_1Y_1+\cdots+a_{n-1}Y_1^{n-1},\ldots,a_0+a_1Y_n+\cdots+a_{n-1}Y_n^{n-1})$, es decir,

$$h_i = (-1)^i s_i(a_0+a_1Y_1+\cdots+a_{n-1}Y_1^{n-1},\ldots,a_0+a_1Y_n+\cdots+a_{n-1}Y_n^{n-1}).$$

Corolario 2.6. *Si* $\theta = a_0+a_1Y_1+\cdots+a_{n-1}Y_1^{n-1}$ *es homogéneo ponderado en* $k[s_1,\ldots,s_n]$ *(es decir, es homogéneo como elemento de* $k[Y_1,\ldots,Y_n]$*), entonces los coeficientes de* $\psi_\theta(V)$ *son homogéneos ponderados en* $k[s_1,\ldots,s_n]$*.*

Consideremos ahora la derivada relativa $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))$ con $0\leq\alpha\leq n-1$ y denotemos por $F_n^{(\alpha)}(Y_1)$ a la clase de $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))$ en $k[s_1,\ldots,s_n][Z]/\langle F_n(Z)\rangle$. Se observa que $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))$ es homogéneo ponderado de grado $n-\alpha$ en $k[s_1,\ldots,s_n][Z]$ y por tanto lo será $F_n^{(\alpha)}(Y_1)$ en $k[s_1,\ldots,s_n][Y_1]$. Así, por el Corolario III.2.6, los coeficientes del polinomio característico $\psi_{F_n^{(\alpha)}(Y_1)}(V)$ son homogéneos ponderados en $k[s_1,\ldots,s_n]$.

Notación 2.7. Denotemos por H_{F_n} la k-subálgebra de $k[s_1,\ldots,s_n]$ generada por los coeficientes de los $n-1$ polinomios característicos $\psi_{F_n^{(\alpha)}(Y_1)}(V)$ con $1\leq\alpha\leq n-1$.

Proposición 2.8. *El subanillo de invariantes* $R_n := k[Y_i-Y_j]^{\mathbb{S}_n}$ *es la clausura entera del anillo graduado* H_{F_n} *en* $k[s_1,\ldots,s_n]$*.*

Demostración. Véase la Proposición 1.23. de [56]. ⥀

2.9. Cálculo explícito para dos polinomios.

Como hicimos en III.1.7, fijemos dos enteros positivos $r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ tales que $r+s=n$ y fijemos dos polinomios universales

$$F_r(Z) = (Z-Y_1)\ldots(Z-Y_r) \;\text{ y }\; F_s(Z) = (Z-Y_{r+1})\ldots(Z-Y_n)$$

de grado r y s respectivamente. Sea $F_n(Z) = F_r(Z) \cdot F_s(Z)$. Podemos generalizar a este contexto los resultados obtenidos en III.2.2.

Observemos primero que

$$k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s} \cong k[Y_1, \ldots, Y_r]^{\mathbb{S}_r} \otimes k[Y_{r+1}, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_s},$$

que además

$$k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}[Z]/\langle F_n(Z)\rangle \cong k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}[Y_1]$$

y que por tanto $k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}[Y_1]$ es un módulo libre de rango n sobre $k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}$.

Como hicimos previamente, podemos definir el endomorfismo multiplicación por un elemento $\theta \in k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}[Y_1]$, denotémosle por ϕ_θ. El polinomio característico de ϕ_θ, $\psi_\theta(V)$, es

$$\psi_\theta(V) := V^n + h_1 V^{n-1} + \ldots h_n \in k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}[V].$$

Notación 2.10. Sea H_{F_r,F_s} la k-álgebra de $k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}$ generada por los coeficientes de los polinomios característicos de la multiplicación por $F_r^{(\alpha_r)}(Y_1)$ y $F_s^{(\alpha_s)}(Y_1)$ ($1 \leq \alpha_r \leq r-1$ y $1 \leq \alpha_s \leq s-1$), i.e., los coeficientes de $\psi_{F_r^{(\alpha_r)}(Y_1)}(V)$ y $\psi_{F_s^{(\alpha_s)}(Y_1)}(V)$, donde $F_r^{(\alpha_r)}(Y_1)$ y $F_s^{(\alpha_s)}(Y_1)$ denotan $\Delta^{(\alpha_r)}(F_r)(Y_1)$ y $\Delta^{(\alpha_s)}(F_s)(Y_1)$ respectivamente.

Proposición 2.11. *El álgebra de eliminación universal $k[Y_i - Y_j]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}$ es la clausura entera del anillo graduado H_{F_r,F_s} en $k[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathbb{S}_r \times \mathbb{S}_s}$.*

Demostración. Véase la Proposición 1.38. de [56]. ◌

Este argumento se puede generalizar de igual manera al caso en el que se consideren más de dos polinomios.

Observación 2.12. Especialización. Como hicimos en III.1.4 y III.1.8, las álgebras H_{F_i} especializan como anteriormente en un álgebra $\mathcal{H}$, obteniéndose así una extensión enteras de álgebras $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ denota el álgebra de eliminación. La importancia ahora, reside en que sabemos calcular de forma explícita $\mathcal{H}$.

2.13. Ejemplo.

Sea $f(z) = z^3 + x^4 z^2 + y^7 \in k[x, y, z]$ donde k es un cuerpo de característica 3. Denotemos por $S = k[x, y]$ y $S' = S[z]$. Consideramos el álgebra de Rees definida por

$$\mathcal{G} = S'[fW^3, \Delta^\alpha(f)W^{3-|\alpha|}]_{\alpha \in \mathbb{N}^3,\ 1 \leq |\alpha| \leq 2},$$

es decir, $\mathcal{G}$ es el álgebra diferencial generada por fW^3.

Los generadores de $\mathcal{G}$ son fW^3 y

$$\Delta_z(f)W^2 = (-x^4z)W^2, \tag{III.12}$$
$$\Delta_x(f)W^2 = (x^3z^2)W^2, \tag{III.13}$$
$$\Delta_y(f)W^2 = (y^6)W^2, \tag{III.14}$$
$$\Delta_{z^2}(f)W^1 = (-x^4)W^1, \tag{III.15}$$
$$\Delta_{xz}(f)W^1 = (-x^3z)W^1. \tag{III.16}$$

Queremos calcular el álgebra de eliminación que se obtiene al eliminar la variable z. Denotemos a este álgebra por $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$. Para calcular $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ seguiremos las ideas introducidas en III.2.2 y III.2.9. Observamos primero que $\Delta_y(f)W^2 = (y^6)W^2$ y $\Delta_{z^2}(f)W^1 = (-x^4)W^1$ son elementos libres de la variable z y por tanto,

$$\Delta_y(f)W^2 = (y^6)W^2 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}} \ \text{ y } \ \Delta_{z^2}(f)W^1 = (-x^4)W^1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}.$$

Consideremos ahora el anillo $S[z]/\langle f(z)\rangle$, queremos calcular los polinomios característicos definidos por los endomorfismos multiplicación de los elementos dados por (III.2.13), (III.2.13) y (III.2.13) en este anillo.

Cálculo del álgebra de eliminación:

(1) Consideremos primero el elemento $(x^4\overline{z})W^2$ y veamos a continuación cuál es el polinomio característico asociado a la multiplicación por el elemento $(x^4\overline{z})W^2$, i.e. $\psi_{(x^4\overline{z})W^2}(\lambda)$.

El conjunto $\{1, \overline{z}, \overline{z}^2\}$ define una base del módulo (libre de rango 3), $S[z]/\langle f(z)\rangle$ sobre S. Así, el morfismo $\phi_{(x^4\overline{z})W^2}$ viene dado por

$$\begin{aligned}
S[z]/\langle f(z)\rangle &\xrightarrow{\phi_{(x^4\overline{z})W^2}} S[z]/\langle f(z)\rangle\\
1 &\longmapsto x^4W^2\cdot\overline{z}\\
\overline{z} &\longmapsto x^4W^2\cdot\overline{z}^2\\
\overline{z}^2 &\longmapsto x^4W^2\cdot\overline{z}^3\\
& = -x^8W^2\cdot\overline{z}^2 + x^4y^7\cdot 1.
\end{aligned}$$

La matriz del endomorfismo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & x^4W^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^4W^2 \\ -x^4y^7W^2 & 0 & -x^8W^2 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico

$$\psi_{(x^4\overline{z})W^2}(\lambda) = \lambda^3 + x^8W^2\lambda^2 + x^{12}y^7W^6,$$

por tanto $x^8W^2, x^{12}y^7W^6 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$.

(2) Repetimos ahora el proceso con el elemento $(x^3\overline{z}^2)W^2$. La matriz del endomorfismo multiplicación $\phi_{(x^3\overline{z}^2)W^2}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^3W^2 \\ -x^3y^7W^2 & 0 & -x^7W^2 \\ x^7y^7W^2 & -x^3y^7W^2 & x^{11}W^2 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico

$$\psi_{(x^3\overline{z}^2)W^2}(\lambda) = \lambda^3 + x^{11}W^2\lambda^2 - x^{10}y^7W^4\lambda - x^9y^{14}W^6,$$

y así $x^{11}W^2, x^{10}y^7W^4, x^9y^{14}W^6 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$.

(3) Por último calculemos el polinomio característico de la multiplicación por $(x^3\overline{z})W^1$. La matriz de $\phi_{(x^3\overline{z})W^1}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & x^3W^1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3W^1 \\ -x^3y^7W^1 & 0 & -x^7W^1 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico viene dado por

$$\psi_{(x^3\overline{z})W^1}(\lambda) = \lambda^3 + x^7W^1\lambda^2 + x^9y^7W^3,$$

y por tanto, $x^7W^1, x^9y^7W^3 \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$.

Por tanto, podemos decir que el álgebra de eliminación está definida por

$$S[y^6W^2, x^4W^1, x^8W^2, x^{12}y^7W^6, x^{11}W^2, x^{10}y^7W^4, x^9y^{14}W^6, x^7W^1, x^9y^7W^3]$$

y por relaciones de clausura entera, queda determinada por

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \sim S[x^4W^1, y^3W^1, x^{12}y^7W^6],$$

donde por $\sim$ denotamos la misma clausura entera de álgebras.

Observación 2.14. Sea $f_{p^e}(z) \in S[z] = S'$ un polinomio puramente inseparable y sea $S = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ un anillo sobre un cuerpo k de característica p. Supongamos que el polinomio es de la forma $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a(x_1, \ldots, x_{n-1})$ con $a(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in S$.

Sea $\mathcal{G}$ el álgebra diferencial asociada al polinomio $f_{p^e}(z)$ está dada por

$$\mathcal{G} = S'[f_{p^e}W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f_{p^e})W^{p^e-|\alpha|}]_{\alpha\in\mathbb{N}^{p^e},\ 1\leq|\alpha|\leq p^e-1},$$

en particular, basta considerar $\widetilde{\Delta}^{\alpha}(f_{p^e})$ con $1 \leq |\alpha| \leq p^e - 1$ donde $\widetilde{\Delta}^{\alpha}$ denota un operador diferencial en S.

Ahora bien, es fácil observar que $\Delta^{\alpha}(f_{p^e}) \subset S$ (se puede identificar con un elemento de S) y por tanto, $\Delta^{\alpha}(f_{p^e})W^{p^e-|\alpha|} \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$. Así,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \sim S[\widetilde{\Delta}^{\alpha}(a(x_1,\ldots,x_{n-1}))W^{p^e-|\alpha|}]_{\alpha\in\mathbb{N}^{n-1},\ 1\leq|\alpha|\leq p^e-1}.$$

2.15. El álgebra de eliminación en característica cero.

Supongamos las mismas condiciones que previamente y supongamos ahora que k es un cuerpo de característica cero. El Teorema de Preparación de Weierstrass implica que toda singularidad de una hipersuperficie de multiplicidad n se puede expresar por medio de un polinomio mónico de grado n en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[z]$

En el contexto de resolución de singularidades, la existencia de hipersuperficies de contacto maximal permite construir un álgebra de coeficientes en una dimensión menor que codifica toda la información de la singularidad (véase, por ejemplo, [21]).

Veamos ahora que en característica cero, el álgebra de eliminación coincide, en algún sentido, con el álgebra de coeficientes clásica.

Fijado $f(z)$ un polinomio mónico de grado n en $S' = \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[z]]$. Gracias a una transformación de Tschirnhausen (un cambio de variables adecuado de la forma $z \mapsto z+\alpha$), se puede suponer que

$$f(z) = z^n + a_2z^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Se considera entonces un álgebra de Rees diferencial de la forma

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f(z)W^n, \Delta^{\alpha}(f(z))W^{n-|\alpha|}]_{1\leq|\alpha|\leq n-1},$$

que codifica toda la información de los puntos de multiplicidad n.

Asociada a ésta álgebra y partiendo del hecho de que $zW^1 \in \mathcal{G}$ y de que z define así una hipersuperficie de contacto maximal, se define por restricción a $z=0$, el *álgebra de coeficientes* como:

$$\mathrm{Coeff}(\mathcal{G}) \sim S[\overline{a}_jW^j, \widetilde{\Delta}^{\alpha_j}(\overline{a}_j)W^{j-|\alpha_j|}]_{1\leq|\alpha_j|\leq j-1,\ 2\leq j\leq n},$$

donde los $\widetilde{\Delta}^{\alpha_j}$ son los operadores diferenciales de orden $|\alpha_j|$ en S.

En cierto modo, a partir del morfismo étale dado por

$$\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle z\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{V^{(d-1)}},$$

se pueden identificar los coeficientes $a_j \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ con los coeficientes $\overline{a}_j$ obtenidos por la restricción a $z=0$. Es en este contexto donde afirmamos que, bajo estas condiciones, el álgebra de eliminación coincide con el álgebra de coeficientes:

Por un lado, vía la identificación previamente citada, siempre tenemos la inclusión

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \subset \mathrm{Coeff}(\mathcal{G}),$$

ya que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ está generada por funciones homogéneas con pesos en los coeficientes de $f(z)$ y de las derivadas $\Delta^{\alpha}(f(z))$. En otras palabras, los generadores de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ se pueden identificar con funciones homogéneas con pesos en los elementos de $\mathrm{Coeff}(\mathcal{G})$.

Veamos ahora que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \supset \mathrm{Coeff}(\mathcal{G})$ (vía la identificación étale).

Recordemos primero que considerábamos $f(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$, se deduce que $\Delta_z^{(n-1)}(f(z))W = n!zW$. Sea ϕ_{zW} el endomorfismo multiplicación definido por $\overline{z}W$. Cuya matriz en la base $\{1, \overline{z}, \ldots, \overline{z}^{n-1}\}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

y cuyo polinomio característico es

$$\phi_{zW}(V) = V^n + a_2 V^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Por tanto $a_j W^j \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ para $j = 2, \ldots, n$.

Por otro lado, como $\mathcal{G}$ es diferencial, entonces se deduce que $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ es diferencial (véase el Corolario IV.4.4 o [56]) y por tanto $\widetilde{\Delta}^{\alpha_j}(a_j)W^{j-|\alpha_j|} \in \mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ para $1 \leq |\alpha_j| \leq j-1$ y $2 \leq j \leq n$. Deduciéndose así que

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \supset \mathrm{Coeff}(\mathcal{G}),$$

y por tanto,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \overset{1\text{–}1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Coeff}(\mathcal{G}).$$

Capítulo IV

El invariante τ, proyecciones genéricas y eliminación

1. Conos tangentes y proyecciones genéricas

1.1. Sea $V^{(d)}$ un esquema liso de dimensión d, y consideremos una hipersuperficie $X \subset V^{(d)}$ definida por $X = V(\langle f\rangle)$, localmente en un punto $x \in V^{(d)}$ de multiplicidad máxima n. El objetivo, a lo largo de esta sección es demostrar que para una proyección *suficientemente genérica*

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

donde $V^{(d-1)}$ denota un esquema liso de dimensión $d-1$. la hipersuperficie X se puede expresar, en topología étale, como

$$X = V(\langle f(Z)\rangle),$$

donde $f(Z) \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z]$ es un polinomio mónico de grado n en la variable independiente Z.

Esta afirmación se cumplirá bajo una cierta condición geométrica que se puede expresar en $\mathbb{T}_{V^{(d)},x}$, el espacio tangente en el punto y que veremos más adelante. De hecho, mostraremos que esta condición geométrica en f se alcanza cuando la recta tangente en x de la curva lisa definida por $\beta^{-1}(\beta(x))$, (denotémosla por $\ell \subset \mathbb{T}_{V^{(d)},x}$) y el cono tangente de la hipersuperficie en el punto, ($\mathcal{C}_f \subset \mathbb{T}_{V^{(d)},x}$), están en posición general (es decir, se intersecan únicamente en el origen de $\mathbb{T}_{V^{(d)},x}$, i.e., $\ell \cap \mathcal{C}_f = \mathbb{O}$). Veamos ahora de forma más concreta esta afirmación.

Sea $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$. El *espacio tangente* en el punto se define como

$$\mathbb{T}_{V^{(d)},x} = \operatorname{Spec}(gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x})),$$

donde $\mathfrak{M}_x$ denota el ideal maximal en el anillo local $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$. El anillo graduado $gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x})$ está definido como

$$gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x}) = k \oplus \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_x^r/\mathfrak{M}_x^{r+1} \oplus \ldots \cong k[X_1, \ldots, X_d],$$

donde por X_i denotamos la clase de cada x_i en $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$, o dicho de otra manera, la forma inicial de cada x_i en el punto x (i.e., $In(x_i) = X_i$).

Consideremos las siguientes sucesiones exactas, para calcular la forma inicial de f:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \langle f \rangle & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V^{(d)},x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{M}_x^r \cap \langle f \rangle & \longrightarrow & \mathfrak{M}_x^r & \longrightarrow & \overline{\mathfrak{M}}_x^r & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & [\mathrm{In}(\langle f \rangle)]_r & \longrightarrow & \mathfrak{M}_x^r/\mathfrak{M}_x^{r+1} & \longrightarrow & \overline{\mathfrak{M}}_x^r/\overline{\mathfrak{M}}_x^{r+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde $[\mathrm{In}(\langle f \rangle)]_r$ denota el ideal de las formas homogéneas de grado r en el ideal homogéneo $\mathrm{In}(\langle f \rangle)$.

Se observa que $\mathfrak{M}_x^r/\mathfrak{M}_x^{r+1} = \overline{\mathfrak{M}}_x^r/\overline{\mathfrak{M}}_x^{r+1}$ para cada entero $r < n$, y el primer índice para el que la igualdad no se cumple es para $r = n$; es decir, es en grado n, donde definiremos la forma inicial de f, denotémosla por $\mathrm{In}(f)$.

Así el anillo graduado de la hipersuperficie queda determinado por

$$gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{X,x}) = k[X_1, \ldots, X_d]/\langle \mathrm{In}(f) \rangle,$$

y el *cono tangente* de la hipersuperficie X en el punto x se define como

$$\mathcal{C}_f := \mathrm{Spec}(gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{X,x})) = \mathrm{Spec}\left(k[X_1, \ldots, X_d]/\langle \mathrm{In}(f) \rangle\right) \ (\subset \mathbb{T}_{V^{(d)},x}).$$

1.2. Fijemos ahora un morfismo liso

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)},$$

definido en un entorno de x, y como previamente denotemos por ℓ la curva lisa definida por $\beta^{-1}(\beta(x))$.

Como f tiene multiplicidad n en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$, la clase de f en $\mathcal{O}_{\ell,x}$, digamos $\overline{f}$, tiene orden al menos n en el anillo local regular $\mathcal{O}_{\ell,x}$. De hecho, tiene orden exactamente n si y sólo si la interesección de la recta tangente de ℓ en x y el cono tangente $\mathcal{C}_f$ es únicamente el origen de $\mathbb{T}_{V^{(d)},x}$ (i.e., $\ell \cap \mathcal{C}_f = \mathbb{O}$). A las proyecciones para las que se cumpla esta condición geométrica las denominaremos *proyecciones genéricas.*

Si fijamos un sistema regular de parámetros $\{x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, el ideal de definición de la curva ℓ está dado por $\langle x_1, \ldots, x_{d-1} \rangle$, y se puede considerar un nuevo parámetro Z de tal forma que $\{Z, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ defina un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$.

En este contexto, la condición geométrica impuesta en el punto x se puede también expresar como

$$\Delta^{(n)}(f)(x) \neq 0,$$

donde $\Delta^{(n)}$ es un operador diferencial relativo a la proyección β de orden exactamente n. Esta nueva formulación dada en términos de operadores diferenciales, tiene una ventaja adicional, ya que la condición definida en términos de operadores diferenciales es una condición abierta. Es decir, si $\Delta^{(n)}(f)(x) \neq 0$, (se cumple la condición geométrica), entonces esta condición se cumple para cualquier punto de orden n de X en un entorno de x. Por tanto, la condición geométrica impuesta en el espacio tangente se cumple en un entorno abierto del punto.

Consideremos ahora la completación de los anillos locales regulares de la proyección definida previamente (una proyección que cumple la condición de transversalidad), es decir, consideremos $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d)},x}$ y $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$. Aplicando el Teorema de Preparación de Weierstrass, el polinomio f se puede expresar como

$$u \cdot f(x_1, \ldots, x_{d-1}, Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

donde u es una unidad y los coeficientes $a_i \in \widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$. Además $\{x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ un sistema regular de parámetros en $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, y después de añadir la variable Z, $\{x_1, \ldots, x_{d-1}, Z\}$ es un sistema regular de parámetros en $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d)},x}$.

Reemplazando completados por henselizaciones, el resultado sigue siendo válido. En este caso, los coeficientes a_i son funciones en un entorno étale del punto $\beta(x)$ en $V^{(d-1)}$.

1.3. El espacio lineal de vértices.

Sea $V^{(d)}$ un esquema liso de dimensión d, sea X una hipersuperficie descrita localmente en un puto $x \in V^{(d)}$ por f, y $\mathcal{C}_f \subset \mathbb{T}_{V^{(d)},x}$ el cono tangente asociado a X en x. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, un vector $v \in \mathbb{V}$ define una *aplicación traslación* descrita por

$$tr_v(w) = w + v \text{ para cada } w \in \mathbb{V}.$$

Existe un subespacio lineal, $\mathcal{L}_f$, con la propiedad de ser el menor subespacio para el cual se cumple

$$tr_v(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_f \quad \text{para cualquier } v \in \mathcal{L}_f,$$

donde ahora entendemos $\mathcal{C}_f$ como un subconjunto reducido y ampliamos el cuerpo k a un cuerpo algebraicamente cerrado, si es necesario. Este subespacio $\mathcal{L}_f$ se conoce como el *espacio lineal de vértices*.

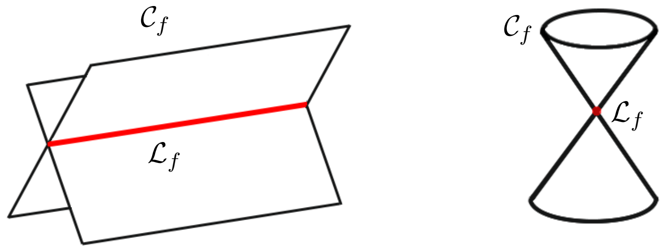


Figura 1: Ejemplos de conos tangentes y espacios lineales de vértices.

Una propiedad importante de este subespacio $\mathcal{L}_f$ es que para cualquier centro liso Y en X, tal que $x \in Y$ y X tenga multiplicidad n a lo largo de Y, el espacio tangente de Y, $\mathbb{T}_{Y,x} \subset \mathbb{T}_{X,x}$, es tal que $\mathbb{T}_{Y,x} \subset \mathcal{L}_f$ y además ésta es una inclusión de subespacios vectoriales.

Por otro lado, existe una caracterización de este espacio lineal en términos algebraicos:

Definición 1.4. Sea S un anillo. Diremos que un ideal homogéneo $I \subset S$ es *cerrado por operadores diferenciales* si para cualquier elemento homogéneo $g \in I$ de orden m y cualquier operador diferencial $\Delta^\alpha \in Diff$ de orden $|\alpha| \leq m-1$, se cumple que $\Delta^\alpha(g) \in I$.

Nótese que los operadores Δ^α están definidos en función de las coordenadas fijadas (véase II.1.21). Veremos en el siguiente Lema que existe una cierta independencia respecto de las coordenadas elegidas.

Lema 1.5. *Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un sistema de coordenadas. Denotemos por Δ_X^α los operadores diferenciales definidos a partir del morfismo de Taylor:*

$$\begin{array}{rcl} k[X_1,\ldots,X_n] & \xrightarrow{Tay_X} & k[X_1,\ldots,X_n,T_1,\ldots,T_n] \\ X_i & \longmapsto & X_i + T_i \end{array}$$

Sea $X_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j$ un cambio lineal de coordenadas ($\lambda_{ij} \in k$ para $i,j = 1,\ldots,n$). Denotemos por Δ_Y^β los operadores diferenciales definidos por las coordenadas $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$. Entonces, los operadores Δ_X^α se pueden expresar como combinación lineal de los operadores Δ_Y^β respetando el orden, es decir,

$$\Delta_X^\alpha = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| = |\alpha|}} \gamma_\beta \Delta_Y^\beta,$$

para ciertos $\gamma_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Demostración. A partir de los morfismos de Taylor definidos para cada sistema de coordinas y el cambio de variables enunciado, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, mapsto] & X_i + T_i \\[-20pt]
k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r, "Tay_X"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & k[X_1,\dots,X_n,T_1,\dots,T_n] \arrow[d] \\
k[Y_1,\dots,Y_n] \arrow[r, "Tay_Y"] & k[Y_1,\dots,Y_n,W_1,\dots,W_n] \\[-20pt]
\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j \arrow[r, mapsto] & \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(Y_j + W_j).
\end{tikzcd}
$$

A partir de este diagrama se deduce que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j + T_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(Y_j + W_j),$$

o lo que es equivalente,

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} W_j$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Es decir, existe un cambio lineal entre las variables T_i y W_j.

Consideremos ahora el morfismo de Taylor en un elemento $f \in k[X_1, \dots, X_n]$:

$$
\begin{aligned}
Tay(f) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Delta_X^{\alpha}(f) T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Delta_X^{\alpha}(f) \Big(\big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j} W_j \big)^{\alpha_1} \dots \big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} W_j \big)^{\alpha_n} \Big)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, cada $\big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} W_j \big)^{\alpha_i}$ (con $i = 1, \dots, n$) es una suma de monomios en las variables W_j de grado α_i. Por tanto, se deduce que

$$Tay(f) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Big(c_{\beta_1} \Delta_X^{\alpha_1}(f) + \dots + c_{\beta_n} \Delta_X^{\alpha_n}(f) \Big) W_1^{\beta_1} \dots W_n^{\beta_n},$$

donde $c_\beta \in k$ y $\beta_1 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Es decir, los operadores diferenciales de orden $|\beta|$ en las coordenadas Y_j, digamos Δ_Y^{β} se pueden expresar como combinación lineal de operadores diferenciales de orden $|\alpha| = |\beta|$ en las coordenadas X, digamos Δ_X^{α}. $\circlearrowleft$

Corolario 1.6. *La Definición* IV.1.4 *es independiente de las coordenadas elegidas.*

Demostración. Se sigue del Lema IV.1.5 ○

Proposición 1.7. *Sea $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subset S$ un ideal homogéneo, donde cada elemento f_i es homogéneo de orden n_i para ciertos enteros $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ con $i = 1, \ldots, r$. Entonces, existe una mínima extensión de I a un ideal cerrado por operadores diferenciales, denotado por $\widetilde{I}$, y que está definido por*

$$\widetilde{I} = \langle \Delta^{\alpha_1}(f_1), \ldots, \Delta^{\alpha_r}(f_r) \rangle_{1 \leq |\alpha_i| \leq n_i - 1,\ 1 \leq i \leq r}.$$

Demostración. Cualquier elemento de I se puede expresar como una combinación de productos de los generadores. Por simplicidad, basta con estudiar el caso en que consideremos un producto de dos elementos de I por un elemento de S, es decir, $g = a \cdot f_i \cdot f_j$, donde $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ y $a \in S$. En este contexto, afirmamos que $\Delta^{\alpha}(g) \in \widetilde{I}$ para cada α tal que $|\alpha| < n_i + n_j$.

Aplicando la regla del producto a g, se deduce que

$$\Delta^{\alpha}(a \cdot f_i \cdot f_j) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha}} \Delta^{\alpha_1}(a) \Delta^{\alpha_2}(f_i) \Delta^{\alpha_3}(f_j).$$

Por otro lado, como $\Delta^{\alpha_2}(f_i) = 0 = \Delta^{\alpha_3}(f_j)$ para todo $\alpha_2 > n_i$, $\alpha_3 > n_j$ y $\Delta^{n_i}(f_i) = \Delta^{n_j}(f_j) = 1$, se obtiene que $\Delta^{\alpha}(g)$ es una combinación de elementos de $\widetilde{I}$, ya que $\Delta^{(\alpha_2)}(f_i), \Delta^{(\alpha_3)}(f_j) \in \widetilde{I}$ para $|\alpha_2| \leq n_i$ y $|\alpha_3| \leq n_j$. Por tanto, $\Delta^{\alpha}(g) \in \widetilde{I}$ para todo α tal que $|\alpha| < n_i + n_j$. ○

Observación 1.8. Dado un sistema regular de parámetros $\{x_1, \ldots, x_d\}$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$, cualquier ideal homogéneo definido en un anillo graduado que sea cerrado por operadores diferenciales está definido por

- Formas lineales,
- Elementos de $k[X_1^p, \ldots, X_d^p]$,
- ...
- Elementos de $k[X_1^{p^m}, \ldots, X_d^{p^m}]$ para algún entero positivo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Supongamos ahora que k es un cuerpo perfecto. Entonces cualquier ideal homogéneo cerrado por operadores diferenciales $\widetilde{I}$ es, después de un cambio de variables lineal, de la forma

$$\widetilde{I} = \langle X_1, \ldots, X_{\tau_0}, X^p_{\tau_0+1} \ldots, X^p_{\tau_1}, \ldots, X^{p^m}_{\tau_{m-1}+1}, \ldots, X^{p^m}_{\tau_m} \rangle.$$

Si extendemos $\langle In(f) \rangle$ al menor ideal cerrado por operadores diferenciales, denotémosle por $\widetilde{I}$, entonces el conjunto de ceros de este ideal homogéneo define el subespacio $\mathcal{L}_f$ que hemos definido previamente de manera geométrica. Pese a que aquí, por simplicidad, estemos suponiendo que el cuerpo subyacente k es perfecto, estas definiciones se pueden generalizar al caso general en el que k sea un cuerpo arbitrario, no necesariamente perfecto.

Recordemos ahora que una proyección es genérica si cumple la propiedad de que la recta ℓ tangente a la curva lisa $\beta^{-1}\beta(x)$ está en posición general con $\mathcal{C}_f$ (y en particular, si $\mathcal{L}_f \cap \ell = \{0\}$). Es ésta una caracterización de tipo más geométrico de la transversalidad definida en IV.1.2

Se pueden, podemos extender estas nociones de manera análoga para álgebras de Rees. Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees sobre un esquema liso $V^{(d)}$. Para un punto cerrado $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, podemos asociar a $\mathcal{G}$ un ideal homogéneo, $In_x(\mathcal{G})$, incluido en $gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x})$; el ideal $In_x(\mathcal{G})$ se define como el ideal homogéneo generado por la clase de I_s en el cociente $\mathfrak{M}_x^s/\mathfrak{M}_x^{s+1}$, para cada $s \geq 1$ y lo denotaremos por $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$.

El ideal $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$ define un cono en el espacio tangente, $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} \subset \mathbb{T}_{V^{(d)},x}$. Como previamente, se define el espacio de vértices $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ como el mayor subespacio incluido en $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ que lo deja invariante por traslaciones, es decir, el mayor subespacio para el que se cumple

$$tr_v(\mathcal{C}_{\mathcal{G}}) = \mathcal{C}_{\mathcal{G}} \text{ para todo } v \in \mathcal{L}_f.$$

Recordemos que $G(\mathcal{G})$ es la menor álgebra diferencial en la que está incluida $\mathcal{G}$ (véase el Teorema II.1.22). Entonces $In_x(G(\mathcal{G}))$ es la menor extensión homogénea de $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x} = In_x(\mathcal{G})$ que es cerrada por la acción de los operadores diferenciales Δ^α; es decir, con la propiedad de que si F es un polinomio homogéneo de grado N en el ideal, y si $|\alpha| \leq N-1$, entonces se cumple que $\Delta^\alpha(F)$ es un elemento del ideal. Además este ideal homogéneo define el subespacio $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, incluido en $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$, con las propiedades definidas anteriormente.

Recordemos que $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \mathrm{Sing}(G(\mathcal{G}))$ (véase la Observación (II.1.24)). Con la discusión anterior mostramos cómo se relacionan el ideal homogéneo en x asociado a $G(\mathcal{G})$, $In_x(G(\mathcal{G}))$, con el asociado a $\mathcal{G}$, $In_x(\mathcal{G})$. Deducimos así que si $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ es el cono tangente asociado a $\mathcal{G}$, entonces el cono asociado a $G(\mathcal{G})$ es el subespacio lineal $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

De nuevo aquí podemos dar una caracterización geométrica alternativa de las proyecciones genéricas. Esta definición se relaciona de manera muy estrecha con uno de los invariantes clásicos de la teoría de singularidades: el invariante τ de Hironaka.

Definición 1.9. (**El invariante τ de Hironaka**). Se define como $\tau_{\mathcal{G},x}$ el mínimo número de variables necesarias para expresar los generadores del ideal $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$. Esta definición algebraica se puede reformular de forma geométrica: $\tau_{\mathcal{G},x}$ es la codimensión del subespacio lineal $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ en $\mathbb{T}_{V^{(d)},x}$.

2. El invariante τ y clausura entera de álgebras de Rees

2.1. En esta sección mostraremos el buen comportamiento del invariante τ con la clausura entera de álgebras de Rees. Es decir, vamos a considerar el invariante τ en el contexto en el que estamos trabajando: considerando álgebras de Rees a menos de equivalencia entera. Ésta afirmación tiene importancia por sí misma, y además será de especial utilidad en la prueba del Teorema IV.3.4.

Esta compatibilidad de τ con la clausura entera, es un resultado ya conocido, pero en esta sección damos una demostración alternativa basada en propiedades de equivalencia entera de álgebras y en la definición algebraica del operador τ. Pruebas alternativas se pueden encontrar, por ejemplo, en [39].

Teorema 2.2. *Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ dos álgebras de Rees sobre V con la misma clausura entera (i.e., $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ son integralmente equivalentes). Entonces, para cada $x \in \operatorname{Sing} \mathcal{G} = \operatorname{Sing} \mathcal{G}'$, existe una igualdad entre sus invariantes τ, es decir,*

$$\tau_{\mathcal{G},x} = \tau_{\mathcal{G}',x}.$$

Para probar el Teorema necesitamos introducir previamente algunos resultados auxilares. La demstración del Teorema se da en IV.2.6.

Lema 2.3. *Sea $\mathcal{G} = \oplus_{n\geq 0} I_n W^n$ un álgebra de Rees definida localmente en x por el conjunto de generadores $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$, es decir,*

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V,x}[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}].$$

Entonces,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{G},x} = \langle In_{n_1}(f_1), \dots, In_{n_s}(f_s)\rangle.$$

Demostración. Consideramos un elemento $h_n W^n \in I_n W^n$. Existe un polinomio homogéneo ponderado de grado n, digamos

$$G_n(Y_1, \dots, Y_s) \in \mathcal{O}_V[Y_1, \dots, Y_n],$$

donde cada Y_i tiene peso n_i, y tal que

$$G_n(f_1W^{n_1},\dots,f_sW^{n_s})W^n = h_nW^n.$$

Consideramos la forma inicial de $G_n(f_1W^{n_1},\dots,f_sW^{n_s})W^n$. Se observa que esta forma inicial se puede expresar como combinación lineal de las formas iniciales $In_{n_i}(f_i)$. En particular, los elementos $In_{n_i}(f_i)$ generan cada elemento de $In_n(I_n)$ para todo entero $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, y por tanto $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x} = \langle In_{n_1}(f_1),\dots,In_{n_s}(f_s)\rangle$. ⟲

Lema 2.4. *Consideremos el álgebra de Rees definida localmente en x como $\mathcal{G}=\mathcal{O}_{V,x}[f_1W^{n_1},\dots,f_sW^{n_s}]$. Sea $N>0$ un entero positivo tal que N es un múltiplo común de cada n_i, $i=1,\dots,s$. Definamos por*

$$\mathcal{G}_N = \mathcal{O}_V[I_NW^N] = \bigoplus_{m\geq 0} I_N^m W^{Nm}$$

el anillo de Rees asociado a I_N. Entonces,

1. $\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x} = \langle In_N(I_N)\rangle$.
2. $\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x}} = \sqrt{\langle In_N(I_N)\rangle} = \sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}}$.
   donde por $\sqrt{I}$ denota el ideal radical de un cierto ideal I.

Demostración.

1. Por definición, $\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x} = \langle In_{mN}(I_{mN})\rangle_{m\geq 1}$. Además, se observa que

   $$\langle In_{mN}(I_{mN})\rangle = \langle In_N(I_N)\rangle^m \subset \langle In_N(I_N)\rangle,$$

   para todo $m\geq 1$.

   Así, se deduce que $\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x} = \langle In_N(I_N)\rangle$.
2. Veamos que $\sqrt{\langle In_N(I_N)\rangle} = \sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}}$. La inclusión del término de la izquierda es inmediata ya que $\langle In_N(I_N)\rangle \subset \mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$.

   Ahora bien, el Lema IV.2.3 garantiza que para demostrar la otra inclusión, es suficiente con probarla para los generadores de $\mathcal{G}$. Como $f_{n_i}^{\alpha_i}\in I_N$ para $\alpha_i=\frac{N}{n_i}$, entonces $In_{n_i}(f_{n_i})^{\alpha_i}\in In_N(I_N)$ y se comprueba así la igualdad $\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x}} = \sqrt{\langle In_N(I_N)\rangle}$. ⟲

Lema 2.5. *Sean N y $\mathcal{G}_N$ como en el Lema* IV.2.4*. Entonces,*

$$\tau_{\mathcal{G},x} = \tau_{\mathcal{G}_N,x}.$$

Demostración. Por definición, $\tau_{\mathcal{G},x} = \mathrm{codim}(\mathcal{L}_{\mathcal{G},x})$, donde $\mathcal{L}_{\mathcal{G},x}$ es el espacio lineal de vértices del conjunto de ceros de $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$. Por tanto, basta considerar el conjunto de ceros de $\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}}$ para definir $\mathcal{L}_{\mathcal{G},x}$. Por el Lema IV.2.4, $\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}} = \sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x}}$, por lo que $V(\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}})$ y $V(\sqrt{\mathbb{I}_{\mathcal{G}_N,x}})$ tienen el mismo subespacio lineal de vértices, es decir, $\mathcal{L}_{\mathcal{G},x} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}_N,x}$. Así, finalmente, se concluye que $\tau_{\mathcal{G},x} = \tau_{\mathcal{G}_N,x}$. $\circlearrowleft$

2.6. *Demostración del Teorema* IV.2.2. Sean $\mathcal{G} = \oplus_{n\geq 0} I_n W^n$ y $\mathcal{G}' = \oplus_{m\geq 0} I'_m W^m$ dos álgebras como las del enunciado del teorema. Supongamos que localmente en x, las álgebras de Rees están definidas por

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{n_1}, \dots, f_r W^{n_r}], \quad \text{y}$$

$$\mathcal{G}' = \mathcal{O}_V[g_1 W^{m_1}, \dots, g_s W^{m_s}].$$

Sea N un entero positivo tal que N es un múltiplo común de cada n_i y de cada m_j, para $i = 1, \dots, r$ y $j = 1, \dots, s$. Consideremos los anillos de Rees asociados a $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ definidos por

$$\mathcal{G}_N = \mathcal{O}_V[I_N W^N] \;\text{ y }\; \mathcal{G}'_N = \mathcal{O}_V[I'_N W^N],$$

respectivamente.

Para probar el teorema, basta con considerar el caso en el que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$. En este caso, se tiene que $I_N \subset I'_N$ y más aún, esta inclusión es una extensión entera de ideales. Se deduce entonces que $\langle In_N(I_N)\rangle \subset \langle In_N(I'_N)\rangle$ es una extensión entera de ideales, ya que se puede comprobar que las condiciones de dependencia entera se dan para los generadores. Así,

$$\sqrt{\langle In_N(I_N)\rangle} = \sqrt{\langle In_N(I'_N)\rangle}.$$

Ahora, los Lemas IV.2.4 y IV.2.5, implican que

$$\tau_{\mathcal{G},x} = \tau_{\mathcal{G}_N,x} = \tau_{\mathcal{G}'_N,x} = \tau_{\mathcal{G}',x},$$

lo que prueba el Teorema. $\circlearrowleft$

3. Presentación local, eliminación y el invariante τ

3.1. Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees y sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado, entonces el cono tangente en x, digamos $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$, en $\mathbb{T}_{V^{(d)},x} = Spec(gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x}))$ está definido por un ideal homogéneo, que denotamos por $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$, en $gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)},x})$

(véase IV.1.3). Si el álgebra de Rees $\mathcal{G}$ es tal que localmente en un entorno de x está definida por

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_{n_1}W^{n_1}, \ldots, f_{n_s}W^{n_s}],$$

entonces el ideal homogéneo está dado por

$$\mathbb{I}_{\mathcal{G},x} = \langle In_{n_1}(f_{n_1}), \ldots, In_{n_s}(f_{n_s})\rangle.$$

Recordemos que podemos considerar el mayor subespacio lineal, que está incluido y que actúa por translaciones en $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$, denotábamos a este subespacio por $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$. A partir de $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ podíamos definir el invariante $\tau_{\mathcal{G},x}$, que no era más que la codimensión de este subespacio lineal. En particular, $\tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$ cuando $\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}$ es un ideal no nulo.

Decimos que una proyección lisa en un esquema $V^{(d-1)}$ liso de dimensión $d-1$, digamos $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$, es transversal a $\mathcal{G}$ en x si la recta tangente a la fibra $\beta^{-1}(\beta(x))$ en x no está incluida en el subespacio lineal $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$. Fijado un sistema regular de parámetros $\{y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}\}$ en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, podemos considerar un elemento Z tal que $\{y_1, y_2, \ldots, y_{d-1}, Z\}$ sea un sistema regular de parámetros $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$. Recordemos ahora que consideramos las álgebras de Rees a menos de clausura entera, por tanto si la condición de transversalidad se cumple, podemos modificar los generadores locales $\{f_{n_1}W^{n_1}, \ldots, f_{n_s}W^{n_s}\}$ de $\mathcal{G}$ de tal forma que cada uno sea de la forma

$$f_{n_i}(Z) = Z^{n_i} + a_1^{(i)}Z^{n_i-1} + \cdots + a_{n_i}^{(i)} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z], \qquad \text{(IV.1)}$$

es decir, para cada $i = 1, \ldots, s$, tenemos un polinomio mónico en Z en un entorno étale adecuado.

Supongamos ahora que el álgebra de Rees $\mathcal{G}$ es diferencial relativa a la proyección $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ (como siempre será en nuestro planteamiento particular). En este caso podemos identificar localmente en x el álgebra $\mathcal{G}$ con

$$\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z][f_{n_i}(Z)W^{n_i}, \Delta^{(\alpha_i)}(f_{n_i}(Z))W^{n_i-\alpha_i}]_{1\leq\alpha_i\leq n_i-1,\ 1\leq i\leq s}$$

mediante la inclusión $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z] \subset \mathcal{O}_{V^{(d)},x}$. Esta inclusión no es más que la especialización de la inclusión del álgebra de eliminación universal de s polinomios mónicos como definíamos en (III.10). En particular, existe un álgebra de eliminación que denotamos por $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[W]$ y que está definida como en (III.11).

Teorema 3.2. (Presentación local relativa). *Sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado tal que $\tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$. Consideramos la proyección $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ que podemos suponer que es transversal en x. Supongamos que $\mathcal{G}$ es un álgebra diferencial* *relativa a β y que existe un elemento $f_nW^n \in \mathcal{G}$ tal que f_n tiene orden n en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$, y $f_n = f_n(Z)$ es un polinomio mónico de grado n en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$.*

Entonces, en un entorno adecuado de x, se cumple:

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_n(Z)W^n, \Delta^{(\alpha)}(f_n(Z))W^{n-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq n-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta},$$

donde identificamos $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)}}[W]$ con $\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$.

Demostración. Podemos suponer que $f_n(Z)W^n \in \{f_{n_1}W^{n_1}, \ldots, f_{n_s}W^{n_s}\}$ como en (IV.1).Veamos que la afirmación de la proposición se cumple en el caso universal. Para simplificar un poco la notación, consideraremos únicamente el caso en el que tenemos tan solo dos generadores (es decir, el caso en que $s = 2$). Así, consideremos variables Z, Y_i y V_j (con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$) sobre el cuerpo k, y consideremos también

$$F_n(Z) = (Z - Y_1) \cdot (Z - Y_2) \ldots (Z - Y_n).$$

Este polinomio $F_n(Z)$ que estamos considerando lo tomamos de grado n ya que tenemos $f_n = f_n(Z)$ de orden n y $f_n(Z)$ es un pull-back de $F_n(Z)$. Sea

$$G_m(Z) = (Z - V_1) \cdot (Z - V_2) \ldots (Z - V_m)$$

un polinomio universal de grado m. Tenemos una inclusión natural de álgebras $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ que se obtiene especializando (III.1.7).

El producto de los grupos de permutaciones, digamos $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$, actúa en el anillo $k[Z, Y_1, \ldots, Y_n, V_1, \ldots, V_m]$ fijando la variable Z. Este grupo además actúa en

$$S = k[Z - Y_1, Z - Y_2, \ldots, Z - Y_n, Z - V_1, Z - V_2, \ldots, Z - V_m].$$

El subanillo de invariantes de S definido por $S^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}$ es

$$k[\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z)), \Delta^{(\gamma)}(G_m(Z))]_{0\leq\alpha\leq n-1,\ 0\leq\gamma\leq m-1},$$

donde la derivada relativa $\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))$ es un polinomio homogéneo de grado $n - \alpha$ y $\Delta^{(\gamma)}(G_m(Z))$ es homogéneo de grado $m - \gamma$. Podemos ahora añadir una variable muda W que simplemente nos indicará el grado. Así, con esta nueva variable W, el subanillo de invariantes $S^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}$ es

$$S =^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m} k[\Delta^{(\alpha)}(F_n(Z))W^{n-\alpha}, \Delta^{(\gamma)}(G_m(Z))W^{m-\gamma}]_{0\leq\alpha\leq n-1,\ 0\leq\gamma\leq m-1}.$$

El álgebra de eliminación universal se define como el anillo de invariantes de

$$S' = k[(Z - Y_2) - (Z - Y_1), \ldots, (Z - Y_n) - (Z - Y_1), \ldots, (Z - V_m) - (Z - Y_1)]$$

bajo la acción de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$

La observación clave para probar la afirmación de la Proposición es que S está generado por dos subanillos: $k[Z - Y_1, \ldots, Z - Y_n]$ y S'. Ahora bien, si consideramos consideramos el anillo de invariantes del primero, se tiene que

$$k[Z - Y_1, \ldots, Z - Y_n]^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m} = k[\Delta^{(e)}(F_n(Z))W^{n-e}]_{0 \leq e \leq n-1}.$$

Por otro lado, el anillo de invariantes del segundo, $S'^{\ \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}$, es el álgebra de eliminación universal. Así, ambas álgebras están incluidas en $S^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}$.

Finalmente, para probar la afirmación, es suficiente con mostrar que $S^{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}$ es una extensión entera del álgebra generada por estas dos subálgebras de invariantes. Pero este hecho se deduce de manera inmediata observando que S es una extensión entera de las subálgebras generadas por las dos subálgebras invariantes. $\circlearrowleft$

Observación 3.3. Con la misma notación que hemos estado utilizando, es conveniente encontrar el entero más pequeño n para el cual existe un polinomio mónico de grado n y una presentación local como la dada en el Teorema IV.3.2.

Estamos considerando que nuestro álgebra $\mathcal{G}$ es integralmente cerrada (o definida salvo clausura entera). Así que lo que haremos será considerar el menor entero n_1 que pueda alcanzarse en un conjunto de generadores $\{f_{n_1}W^{n_1}, \ldots, f_{n_s}W^{n_s}\}$ de $\mathcal{G}$ como en (IV.1).

La discusión que desarrollamos al considerar la eliminación de dos polinomios (véase III.1.7), muestra que además el polinomio mónico $f_{n_1}(Z) \in \mathcal{O}_{V^{d-1}}[Z]$ tiene que ser irreducible.

Por otra parte, el álgebra $\mathcal{G}$ es cerrada bajo la acción de operadores diferenciales relativos a β , por lo tanto, se deduce que $n_1 = p^e$, es decir, el menor orden del polinomio mónico será una potencia de la característica del cuerpo sobre el que estamos trabajando.

Teorema 3.4. *Sea $V^{(d)}$ un esquema liso de dimensión d, sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees diferencial, sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado y supongamos que $\tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$. Fijemos una proyección genérica $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ (véase* IV.1.2*). Bajo estas condiciones tenemos definida de forma local en un entorno de $\beta(x)$ un álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ en $V^{(d-1)}$. Esta nueva álgebra de eliminación cumple que su invariante τ baja en uno, esto es,*

$$\tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta},\beta(x)} = \tau_{\mathcal{G},x} - 1.$$

Demostración. Fijado un sistema regular de parámetros $\{x_1,\dots,x_d\}$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$, el anillo graduado de $\mathcal{O}_{V^{(d)}}$ está definido por $k'[X_1,\dots,X_d]$ donde por X_i denotamos la forma inicial de x_i en x para $i=1,\dots,n$. Aquí, k' es el cuerpo residual del anillo local en el punto cerrado. Si suponemos que k' es un cuerpo perfecto, es sabido que para una elección adecuada de $\{x_1,\dots,x_d\}$, se cumple que

$$\mathbb{I}_{\mathcal{G},x}=\langle X_1^{p^{e_1}},\dots,X_r^{p^{e_r}}\rangle,$$

para ciertos enteros no negativos $e_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,\dots,r)$.

Así, existen elementos $f_iW^{p^{e_i}}\in\mathcal{G}$ con $i=1,\dots,r$, tales que

$$In_{p^{e_i}}(f_i)=X_i^{p^{e_i}}.$$

Como β es una proyección genérica (véase IV.1.2), se cumple que $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}\cap\ell=\{0\}$, donde por ℓ denotamos la recta tangente a la fibra de la proyección. Por lo tanto, se deduce que en particular, para algún índice $i\in\{1,\dots,r\}$, se cumple

$$\mathcal{C}_{f_i}\cap\ell=\{0\}.$$

Supongamos que esta condición se alcanza para $i=1$.

El Teorema de Preparación de Weierstrass implica que en un entorno étale de x, se puede expresar f_1 como

$$f_1(x_1)=x_1^{p^{e_1}}+a_1x_1^{p^{e_1}-1}+\cdots+a_{p^{e_1}},$$

donde cada coeficiente $a_i\in\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$ y el orden de a_i es $>i$. Es importante observar que se obtiene una desigualdad estricta en el orden de los coeficientes. Esta última afirmación se deduce al considerar formas iniciales, ya que se cumplía que $In_{p^{e_1}}(f_1)=X_1^{p^{e_1}}$.

Por el Teorema IV.3.2 podemos asumir que existe una presentación local relativa de la forma

$$\mathcal{G}\sim\mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_1(x_1)W^{p^{e_1}},\Delta^{(\alpha)}(f_1(x_1))W^{p^{e_1}-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^{e_1}-1}\odot\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}).$$

Denotemos por $\widetilde{\mathcal{G}}$ el álgebra de Rees definida como

$$\widetilde{\mathcal{G}}=\mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_1(x_1)W^{p^{e_1}},\Delta^{(\alpha)}(f_1(x_1))W^{p^{e_1}-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^{e_1}-1}.$$

En este caso, se cumple que $\tau_{\widetilde{\mathcal{G}},x}=1$ y la única variable que se necesita para definir los generadores de $\mathbb{I}_{\widetilde{\mathcal{G}},x}$ es X_1.

Por otro lado, en $\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})\subset\mathcal{O}_{V^{(d)}}$ hemos eliminado la variable x_1, por tanto X_1 no es necesaria para definir los generadores de $\mathbb{I}_{\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})}$.

Finalmente, recordemos que $\mathcal{G}\sim\widetilde{\mathcal{G}}\odot\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$, es decir, ambas álgebras tienen la misma clausura entera. En la Proposición IV.2.2 se probó que dos álgebras con la misma clausura entera tienen igual invariante τ. Por tanto, es inmediato deducir que $\tau_{\mathcal{G}} = \tau_{\mathcal{G}_1 \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}}$. Por los argumentos anteriores se llega a que

$$\tau_{\mathcal{G}} = 1 + \tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}}.$$

$\circlearrowleft$

Corolario 3.5. *En el caso general, cuando el álgebra $\mathcal{G}$ es únicamente diferencial relativa a $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$, se tiene la siguiente relación entre los invariantes τ*

$$\tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}} \leq \tau_{\mathcal{G}} - 1$$

Demostración. A partir de la inclusión de álgebras de Rees definida por $\mathcal{G} \subset G(\mathcal{G})$ (G denota el operador de Giraud (ver Teorema II.1.22)), se deduce que $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{R}_{G(\mathcal{G}),\beta} = \mathcal{H}$. Ahora, por la inclusión anterior y el Teorema IV.3.4, se tiene

$$\tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}} \leq \tau_{\mathcal{H}} = \tau_{G(\mathcal{G})} - 1 = \tau_{\mathcal{G}} - 1,$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a la compatibilidad del invariante τ con los operadores diferenciales. $\circlearrowleft$

Observación 3.6. Sean $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees diferencial, $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado, y supongamos que $\tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$. Podemos encontrar una potencia de la característica del cuerpo sobre el que trabajamos, digamos p^{e_1} ($e_1 \geq 0$), tal que exista una presentación local relativa de la forma

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_1(x_1)W^{p^{e_1}}, \Delta^{(\alpha)}(f_1(x_1))W^{p^{e_1}-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^{e_1}-1} \odot \beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}).$$

donde $f_1(x_1)$ es un polinomio mónico de grado p^{e_1} de la forma

$$f_1(x_1) = x_1^{p^{e_1}} + a_1^{(1)} x_1^{p^{e_1}-1} + \cdots + a_{p^{e_1}}^{(1)} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[x_1]$$

y donde p^{e_1} es el menor entero n para el cual existe un elemento $f_n \in I_n$ de orden n en el punto x.

Como $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{G}$ se deduce que $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ es un álgebra diferencial en $V^{(d-1)}$ (véase el Corolario IV.4.4). Supongamos ahora que $\tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta},\beta(x)} \geq 1$, entonces existe un morfismo liso transversal $\beta_1 : V^{(d-1)} \to V^{(d-2)}$ y un entero positivo $e_2 (\geq e_1)$ tal que

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_2(x_2)W^{p^{e_2}}, \Delta^{(\alpha)}(f_2(x_2))W^{p^{e_2}-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^{e_2}-1} \odot \beta_1^*(\mathcal{R}_{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta},\beta_1}),$$

donde $\Delta^{(\alpha)}$ es un operador diferencial relativo a β_1 de orden α y $f_2(x_2)$ es un cierto polinomio mónico definido como

$$f_2(x_2) = x_2^{p^{e_2}} + a_1^{(2)} x_2^{p^{e_2}-1} + \cdots + a_{p^{e_2}}^{(2)} \in \mathcal{O}_{V^{(d-2)},\beta(x)}[x_2].$$

Así, si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Rees diferencial y si $\tau = \tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$, podemos considerar un morfismo liso transversal $\beta : V^{(d)} \to V^{(d-\tau)}$ y para cada índice $1 \leq i \leq \tau$ podemos considerar un polinomio mónico

$$f_i(x_i) = x_i^{p^{e_i}} + a_1^{(i)} x_i^{p^{e_i}-1} + \cdots + a_{p^{e_i}}^{(i)} \in \mathcal{O}_{V^{(d-i)},\beta(x)}[x_i],$$

donde $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_\tau$, y

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_i(x_i)W^{p^{e_i}}, \Delta^{(\alpha)}(f_i(x_i))W^{p^{e_i}-\alpha}]_{1\leq i\leq\tau;\ 1\leq\alpha\leq p^{e_i}-1} \odot \beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}).$$

Observamos ahora que $\mathcal{G}$ contiene al álgebra

$$P_{\mathcal{G}} = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_i(x_i)W^{p^{e_i}}]_{1\leq i\leq\tau} \odot \beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}),$$

y que de hecho, se da la igualdad de lugares singulares

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}) = \operatorname{Sing}(P_{\mathcal{G}}).$$

Más aún, esta igualdad de lugares singulares se preserva después de una sucesión de transformaciones permisibles. El álgebra $P_{\mathcal{G}}$ recibirá el nombre de *presentación local del álgebra* $\mathcal{G}$ *en un entorno de* x.

4. Algunos resultados importantes de álgebras de eliminación

4.1. Álgebras diferenciales e identificación de lugares singulares.

A continuación enunciaremos una serie de resultados relacionados con álgebra diferenciales y sus correspondientes álgebras de eliminación (fijada una proyección). Los resultados aquí expuestos, entre otros, aparecen en [56] explicados de una manera más detallada.

Fijemos $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$ un punto cerrado tal que $\tau_{\mathcal{G},x} \geq 1$. Consideramos la proyección $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ que podemos suponer que es transversal en x. Supongamos que $\mathcal{G}$ es un álgebra diferencial relativa a β y que existe un elemento $f_n W^n \in \mathcal{G}$ tal que f_n tiene orden n en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$, y

$$f_n = f_n(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$$

es un polinomio mónico de grado n en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z]$. Denotemos por $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ el álgebra de eliminación que aparece en este contexto.

En el siguiente Teorema se expone una caracterización de los puntos de ramificación del morfismo y de los puntos de multiplicidad máxima de la hipersuperficie en función del álgebra de eliminación:

Teorema 4.2. *Supongamos la situación descrita previamente y supongamos además que*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[h_{n_1}W^{n_1}, \ldots, h_{n_s}W^{s}].$$

Entonces:

(1) *El conjunto*

$$V\big(\langle h_{n_1}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,h_{n_s}(a_1,\ldots,a_n)\rangle\big)$$

define localmente el conjunto de puntos de $V^{(d-1)}$ donde el morfismo β es puramente ramificado.

(2) *Sea $x \in V^{(d)}$ un punto de multiplicidad n de la hipersuperficie definida por $V(f_n(Z))$ en $V^{(d)}$, entonces*

$$\nu_{\beta(x)}(h_{n_i}(a_1,\ldots,a_n)) \geq n_i$$

para $1 \leq i \leq s$.

Demostración. Véase el Teorema 1.16. de [56]. $\circlearrowleft$

Teorema 4.3. *Supongamos la misma situación descrita al inicio de la sección y supongamos además que $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} I_n W^n$ es un álgebra de Rees diferencial absoluta. Denotemos por $B = \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[Z]/\langle f_n(Z)\rangle$ el anillo cociente. Sea $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I}_n W^n \subset B[W]$ el álgebra inducida por la restricción de $\mathcal{G}$. Entonces:*

(1) *Se cumple la igualdad de lugares singulares dada por*

$$\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}).$$

(2) *El álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ está incluida en $\overline{\mathcal{G}} \cap \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[W]$ como subálgebra de $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$.*

(3) *$\overline{\mathcal{G}}$ es entera sobre $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ (en particular, $\overline{\mathcal{G}} \cap \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[W]$ es entera sobre $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$).*

(4) *El álgebra $\overline{\mathcal{G}} \cap \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[W]$ es, salvo clausura entera, independiente de la elección del elemento f_n que hayamos considerado.*

(5) *Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ es una extensión finita de álgebras de Rees, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{G}',\beta}$ también es una extensión finita.*

Demostración. Véase el Teorema 4.11. de [56]. $\circlearrowleft$

Corolario 4.4. *Supongamos la misma notación y situación que en el Teorema* IV.4.3. *Recordemos que $\mathcal{G}$ era un álgebra de Rees diferencial absoluta. Entonces el álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ es un álgebra de Rees diferencial absoluta.*

Demostración. Véase el Corolario 4.14. de [56]. $\circlearrowleft$

Capítulo V

Transformaciones monoidales, proyecciones y eliminación

1. Fórmula de Multiplicidad de Zariski

En esta sección aplicaremos un resultado de Zariski relacionado con multiplicidades de anillos locales a nuestro contexto particular: Una proyección genérica de una hipersuperficie X inmersa en un esquema liso de dimensión d, $V^{(d)}$, está localmente definida por un polinomio mónico con coeficientes que son funciones en un esquema liso de dimensión $d-1$. Es decir, $X \xrightarrow{\overline{\beta}} V^{(d-1)}$, donde aquí $\overline{\beta}$ es la restricción de la proyección genérica β que describimos en IV.1.2.

Teorema 1.1 (Teorema de multiplicidad de Zariski). *Sea A un anillo local, $\mathfrak{M}$ su ideal maximal, $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{M}$-primario en A, y B un anillo que continene a A y que es un A-módulo finito. Entonces, B es un anillo semilocal y $\mathfrak{q}B$ un ideal abierto de B.*

Sea $\{\mathfrak{p}_i\}$ el conjunto de ideales maximales de B y sea $\mathfrak{q}_i$ la componente primaria de $\mathfrak{q}B$ relativa a $\mathfrak{p}_i$. Si ningún elemento diferente de 0 en A es un divisor de cero en B y todos los anillos locales $B_{\mathfrak{p}_i}$ tienen la misma dimensión que A, entonces

$$[B:A]e(\mathfrak{q}) = \sum_i [B/\mathfrak{p}_i : A/\mathfrak{M}]e(\mathfrak{q}_i),$$

donde por $e(\mathfrak{q})$ denotamos la multiplicidad del ideal $\mathfrak{q}$ y por $[B:A]$ el máximo número de elementos de B que son linealmente independientes sobre A, es decir, la dimensión del anillo total de fracciones de B considerado como espacio vectorial sobre el cuerpo de cocientes de A.

Demostración. Véase [65], Capítulo VII $\oint$10, Corolario 1 al Teorema 24. $\circlearrowleft$

1.2. Consideremos el morfismo previo $X \xrightarrow{\overline{\beta}} V^{(d-1)}$, es decir, la restricción de una proyección genérica fijada. Localmente, en un entorno abierto afín,

X está definido por un anillo que denotaremos por B, y $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ por otro anillo denotado por A, de tal forma que $B = A[Z]/\langle f(Z)\rangle$, donde $f(Z)$ es un polinomio mónico de grado n en una variable Z. Como $f(Z)$ es un polinomio mónico de grado n, entonces el morfismo $\overline{\beta}$ definido por la restricción es un morfismo finito.

Proposición 1.3. *Supongamos las mismas hipótesis que acabamos de definir. Denotemos por $\mathcal{F}_n$ el conjunto de puntos de multiplicidad n de la hipersuperficie X. Entonces,*

1. *La aplicación β induce una biyección conjuntista entre $\mathcal{F}_n$ $(\subset X)$ y su imagen, $\beta(\mathcal{F}_n)$, en $V^{(d-1)}$.*
2. *Si P es un punto de $\mathcal{F}_n$, entonces los cuerpo residuales $k(P)$ y $k(\beta(P))$ son isomorfos:*
$$k(P) \cong k(\beta(P)).$$

Demostración. Recordemos que B denota el anillo que define localmente la hipersuperficie X en un entorno de x y por A el anillo local de $V^{(d-1)}$. Se tiene entonces que
$$B = A[Z]/\langle f(Z)\rangle,$$
en un entorno étale adecuado de x.

Queremos aplicar la fórmula de Zariski a este contexto particular, empecemos calculando el valor de $[B : A]$. Para ello, basta con considerar el producto tensorial $B \otimes_A K$, donde K es el cuerpo de fracciones de A, y calcular su dimensión como espacio vectorial sobre K. Como se da la igualdad
$$B \otimes_A K = K[Z]/\langle f(Z)\rangle;$$
y además $f(Z)$ es mónico de grado n, entonces se deduce que $[B : A] = n$.

Consideremos ahora una variedad lisa $Y \subset X$ tal que X es equimúltiple de multiplicidad n a lo largo de Y. Denotemos por P el punto genérico de Y y por $\mathfrak{q}$ la contracción de P en A. Ahora, localizando A en $\mathfrak{q}$, se obtiene un anillo local $A_{\mathfrak{q}}$, donde $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ tiene multiplicidad 1, esto es, $e(\mathfrak{q}) = 1$.

Sean $P_1, \ldots, P_n$ los ideales primos de B que dominan $\mathfrak{q}$, esto es, los puntos de la fibra $B \otimes_A k(\mathfrak{q})$, uno de estos ideales primos es el ideal P que hemos considerado antes. Consideramos los anillos locales B_{P_i} y el ideal generado por $\mathfrak{q}$, es decir $\mathfrak{q}B_{P_i}$. En este contexto, la fórmula de multiplicidad de Zariski se reformula como
$$n = [B : A]e(\mathfrak{q}) = \sum_i [k(P_i) : k(\mathfrak{q})] e_{B_{P_i}}(\mathfrak{q}B_{P_i}),$$
donde $e_{B_{P_i}}(\mathfrak{q}B_{P_i})$ denota la multiplicidad de $\mathfrak{q}B_{P_i}$ en B_{P_i}. Obsérvese que $\mathfrak{q}B_{P_i}$ es un ideal propio y que su radical es $P_iB_{P_i}$.

Hemos supuesto que P es el punto genérico a lo largo de una variedad en la que x tiene multiplicidad n. Supongamos ahora, que P se corresponde con P_1 siguiendo la notación anterior. Entonces $e_{B_{P_1}}(P_1) = n$ y como $e_{B_{P_1}}(P_1) \leq e_{B_{P_1}}(\mathfrak{q}B_{P_1})$, se deduce que

$$n = [B : A]e(\mathfrak{q}) \leq n \cdot [k(P_1) : k(\mathfrak{q})] + \sum_{i \geq 2} [k(P_i) : k(\mathfrak{q})] e_{B_{P_i}}(\mathfrak{q}B_{P_i});$$

es decir, para que se cumpla la fórmula de Zariski, P_1 es el único primo que domina a $\mathfrak{q}$ y además $[k(P_1) : k(\mathfrak{q})] = 1$. $\circlearrowleft$

Teorema 1.4. *Sea X una hipersuperficie en $V^{(d)}$. Sea $x \in X$ un punto cerrado de multiplicidad máxima n en X. Consideremos $Y \subset X$ un centro liso equimúltiple, tal que $x \in Y$. Sea $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ es una proyección genérica como la descrita en* IV.1.1. *Entonces, $\beta(Y)$ es liso.*

Demostración. Podemos reducir nuestro problema a topología étale, y suponer que partimos de una situación análoga a la anterior, es decir, suponer que X está definida por un polinomio mónico de grado n, y por tanto que $X \xrightarrow{\overline{\beta}} V^{(d-1)}$ es un morfismo finito. En particular, $Y \longrightarrow \beta(Y)$ es también un morfismo finito y además es birracional por la Proposición V.1.3.

Denotemos, localmente en un entorno afín, por D el anillo de Y y por C el de $\beta(Y)$. Por la Proposición V.1.3, estos dos dominios tienen el mismo cuerpo de cocientes y $C \longrightarrow D$ es una extensión finita. De hecho, queremos probar que $C = D$. Para ello, necesitamos usar el siguiente Lema bien conocido:

Lema 1.5. *Sea $(R, \mathfrak{M})$ un dominio local y M un R-módulo finito. Supongamos que $R/\mathfrak{M} \otimes_R M$ es un $R/\mathfrak{M}$-espacio vectorial de dimensión e y que $K \otimes_R M$ es un K-espacio vectorial de dimensión e', donde K es el cuerpo de cocientes de R. En general, $e \leq e'$ y la igualdad se alcanza si y sólo si $M \cong R \oplus \overset{e}{\ldots} \oplus R = R^e$, esto es, si M es un R-módulo libre de rango e.*

Utilizaremos este Lema para probar que D es un C-módulo localmente libre de rango 1 y concluir así que $C = D$. A partir de la Proposición V.1.3 se deduce que $\mathrm{Spec}(Y) \longleftarrow \mathrm{Spec}(\beta(Y))$ es una biyección de conjuntos Si consideramos un primo $\mathfrak{q}$ en C, entonces existe un único primo $\mathfrak{q}'$ que domine a $\mathfrak{q}$. Ahora, el anillo semilocal $D \otimes_C C_{\mathfrak{q}}$ tiene un único ideal maximal, por lo que $D_{\mathfrak{q}'} = D \otimes_C C_{\mathfrak{q}}$ y por lo tanto $C_{\mathfrak{q}} \longrightarrow D_{q'}$ es finito.

Sea K el cuerpo de cocientes de C. Como $D \otimes_C K$ es una extensión finita de K y además es un dominio, se tiene que $D \otimes_C K$ es un cuerpo y, en particular, el cuerpo de cocientes de D. Por la Proposición V.1.3, los anillos

C y D tienen los mismos cuerpos de cocientes, por tanto

$$\dim_K(D \otimes_C K) = 1.$$

Tomemos el ideal primo $\mathfrak{q}$ definido como $\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_{\beta(x)}$, donde x es el punto de multiplicidad n citado en las hipótesis del teorema. La condición de transversalidad de β asegura que $\mathfrak{q}D_{\mathfrak{q}'} = \mathfrak{q}'D_{\mathfrak{q}'}$.

A partir de esta última afirmación, se deduce que

$$D_{\mathfrak{q}'} \otimes_{C_\mathfrak{q}} C_\mathfrak{q}/\mathfrak{q} = D_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{q}D_{\mathfrak{q}'} = D_{q'}/\mathfrak{q}'D_{\mathfrak{q}'} = k(\mathfrak{q}').$$

Por otro lado, la Proposición V.1.3 implica que $k(\mathfrak{q}) = k(\mathfrak{q}')$, por tanto

$$\dim_{C_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{q}'} \otimes_{C_\mathfrak{q}} C_q/\mathfrak{q} = 1.$$

Así, aplicando ahora el Lema V.1.5 obtenemos que $D_{\mathfrak{q}'}$ es un $C_\mathfrak{q}$-módulo libre de rango 1. El Lema de Nakayama garantiza que se pueda levantar una base de $D_{\mathfrak{q}'} \otimes_{C_\mathfrak{q}} C_q/\mathfrak{q}$ como $C_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}$-espacio vectorial a una base minimal de $D_{\mathfrak{q}'}$ como $C_\mathfrak{q}$-módulo. Por tanto, como el rango es de $D_{\mathfrak{q}'}$ es uno, se sigue que

$$C_\mathfrak{q} = D_{\mathfrak{q}'}.$$

Se puede repetir este argumento para cada punto x de multiplicidad n y así deducir que $C = D$ en topología étale, por lo que $\beta(Y)$ es liso. ↺

1.6. Compatibilidad entre centros permisibles en $V^{(d)}$ y $V^{(d-1)}$.

Consideremos X y $V^{(d)}$ como antes, $x \in X$ un punto cerrado de multiplicidad n en X. Sea $Y \subset X$ un centro regular equimúltiple de multiplicidad n, tal que $x \in Y$. Sea $\{x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ un sistema regular de parámetros de $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$; este sistema regular de parámetros se puede levantar a un sistema regular de parámetros $\{x_1, \ldots, x_{d-1}, z\}$ de $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$.

Supongamos que el centro liso $\beta(Y)$ puede expresarse de forma local por $I(\beta(Y)) = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Veamos, a continuación, que después de un cambio de variables de la forma $z \mapsto z - \alpha$ (con $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$), el centro liso Y se puede expresar de forma local como $I(Y) = \langle z, x_1, \ldots, x_r \rangle$.

Consideremos la clase de la función z en $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[z]/\langle f(z) \rangle$, denotémosla por $\overline{z}$. Como $\mathcal{O}_{Y,x} = \mathcal{O}_{\beta(Y),\beta(x)}$ (véase la prueba del Teorema V.1.4), podemos considerar la clase de $\overline{z}$ en $\mathcal{O}_{\beta(Y),\beta(x)}$, esto es, $\overline{\overline{z}}$. Entonces $\overline{\overline{z}}$ es la clase de algún elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, por lo que después de un cambio de variables de la forma $z \mapsto z - \alpha$, se llega a que $z \in I(Y)$ localmente en un entorno de x y es igual a 0 después de restringirlo a $\mathcal{O}_{\beta(Y),\beta(x)}$ $() = \mathcal{O}_{Y,x}$.

2. Conmutatividad de proyecciones y transformaciones monoidales

2.1. Como en las secciones previas, sean $X \subset V^{(d)}$ una hipersuperficie, $x \in X$ un punto cerrado de multiplicidad máxima n, y $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ una proyección genérica definida como en IV.1.2. Así, localmente tenemos que $X = V(f(z))$, donde z es igual a 0 en el anillo local $\mathcal{O}_{\beta(X),\beta(x)}$, y

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

donde los coeficientes $a_i \in \mathcal{O}_{V^{d-1},\beta(x)}$ y tienen orden $\geq i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Un álgebra diferencial relativa se puede asociar de manera local a la hipersuperficie X. Este álgebra se define como

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V^{(d)},x}[f(z)W^n, \Delta^{(\alpha)}(f(z))W^{n-\alpha}]_{1 \leq \alpha \leq n-1},$$

y tiene la particularidad de que el lugar singular de $\mathcal{G}$, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ es exactamente el conjunto de puntos de multiplicidad n de X en un entorno de x.

Como en (V.1), podemos definir un álgebra de eliminación asociada a esta proyección, es decir, asociada a la expresión polinomial de $f(z)$. Denotemos este álgebra de eliminación por

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} = \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}[h_{n_1}W^{n_1}, \ldots, h_{n_s}W^{n_s}]. \tag{V.1}$$

Consideremos ahora un centro regular equimúltiple $Y \subset X$ de multiplicidad n tal que $x \in Y$ e $I(Y) = \langle z, x_1, \ldots, x_r \rangle$. Podemos definir, por tanto, una transformación monoidal de $V^{(d)}$ a lo largo de Y y además otra transformación monoidal de $V^{(d-1)}$ a lo largo de $\beta(Y)$. En esta sección veremos que existe un diagrama conmutativo entre proyecciones y estas transformaciones monoidales. Este diagrama conmutativo no estará definido en todo el transformado de $V^{(d)}$, pero estará definido en un subconjunto abierto que contenga al lugar singular; condición que bastará para nuestro planteamiento particular.

Sea $V^{(d)} \xleftarrow{\pi} V_1^{(d)}$ la transformación monoidal de $V^{(d)}$ a lo largo de Y; denotemos por $\mathcal{G}_1$ el transformado de $\mathcal{G}$ definido como en (II.1). Recordemos que los generadores de $\mathcal{G}_1$ están definidos como los transformados débiles (salvo unidad) de los generadores del álgebra de Rees $\mathcal{G}$.

Observación 2.2. Cada punto de multiplicidad n está en el conjunto abierto definido por

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i},$$

donde cada U_{x_i} $(i = 1, \dots, r)$ denota el conjunto abierto

$$U_{x_i} = \operatorname{Spec}\Big(k\big[\frac{z}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_r}{x_i}, x_{r+1}, \dots, x_{d-1}, x_i\big]\Big).$$

Para comprobar esta afirmación, basta con estudiar los transformados de las ecuaciones en el abierto dado por

$$U_z = \operatorname{Spec}\Big(k\big[\frac{x_1}{z}, \dots, \frac{x_r}{z}, x_{r+1}, \dots, x_{d-1}, z\big]\Big).$$

El transformado estricto de $f(z) = z^n\big(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\big)$ en esta carta viene dado por

$$f_1 = 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}.$$

El origen de esta carta no es un punto de multiplicidad n y en consecuencia los puntos de multiplicidad n se pueden ver en cualquiera de las otras cartas.

En el subconjunto abierto U_{x_i}, el transformado del álgebra de Rees, $\mathcal{G}_1$, está dado por

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(d)}}(U_{x_i})[f_1 W^n, \big(\Delta^{(\alpha)}(f)\big)_1 W^{n-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq n-1},$$

donde

$$f_1 = f_1\Big(\frac{z}{x_i}\Big) = \Big(\frac{z}{x_i}\Big)^n + \frac{a_1}{x_i}\Big(\frac{z}{x_i}\Big)^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{x_i^n}$$

y

$$\big(\Delta^{(\alpha)}(f)\big)_1 = \Delta_1^{(\alpha)}\Big(f\big(\frac{z}{x_i}\big)\Big),$$

donde por $\Delta_1^{(\alpha)}$ denotamos el operador diferencial relativo de orden α en esta carta (véase (III.6)).

Sea $V^{(d)} \xleftarrow{\pi'} V_1^{(d-1)}$ la transformación monoidal a lo largo de $\beta(Y)$. La discusión anterior asegura que se pueda definir una proyección genérica β_1 de $\mathcal{U}$ en $V_1^{(d-1)}$, dada por $\mathcal{U} \xrightarrow{\beta_1} V_1^{(d-1)}$. Afirmamos (y veremos al final de la sección) que β_1 es compatible con la proyección β (véase Proposición V.2.4). Una nueva álgebra de eliminación se define en términos de esta proyección β_1, denotémosla por

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1} = \mathcal{O}_{V_1^{(d-1)}}(U_{x_i})[\widetilde{h}_{m_1} W^{m_1}, \dots, \widetilde{h}_{m_l} W^{m_l}].$$

A partir de la definición de álgebras de eliminación (véase la Sección III.1), se tiene que cada $\widetilde{h}_{m_j}$ es un polinomio homogéneo ponderado de grado m_j en los coeficientes de $f_1(\frac{z}{x_i})$. Es decir, los $\widetilde{h}_{m_j}$ son homogéneos ponderados en $\frac{a_j}{x_i^j}$ (con peso j), donde los a_j son los coeficientes del polinomio $f(z)$.

Más aún, a partir de (III.7) se deduce que $n_j = m_j$ para $j = 1, \ldots, s$ y de hecho, $s = l$ (donde por n_j denotábamos los pesos de los generadores del álgebra de eliminación en (V.1)) y

$$\widetilde{h}_{n_i} = \left(\frac{1}{x_i}\right)^{n_i} h_{n_i}.$$

Consideremos ahora la transformación monoidal de $V^{(d-1)}$ con centro $I(\beta(Y)) =< x_1, \ldots, x_r >$. Podemos ahora definir el transformado del álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$, denotemos al transformado por $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$. En cada carta U_{x_i}, el álgebra de eliminación transformada $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$ está definida por

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(d-1)}}(U_{x_i})[(h_{n_1})_1 W^{n_1}, \ldots, (h_{n_s})_1 W^{n_s}],$$

donde $(h_{n_i})_1 = \left(\frac{1}{x_i}\right)^{n_i} \cdot h_{n_i}$, para $i = 1, \ldots, r$. Esto pueba que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}.$$

Estamos ahora en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 2.3. *Sean X y $V^{(d)}$ definidos como previamente. Sea $x \in X$ un punto de multiplicidad máxima n en X. Sea $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ una proyección genérica definida como en* IV.1.2. *Consideremos $Y \subset X$ un centro regular equimúltiple de multiplicidad n y sea $\beta(Y)$ su imagen en $V^{(d-1)}$. Denotemos por π la transformación monoidal de $V^{(d)}$ a lo largo de Y y por $\widetilde{\pi}$ la transformación monoidal de $V^{(d-1)}$ en $\beta(Y)$. Entonces:*

1. *El siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd} V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] \\ V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

   donde $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $V_1^{(d)}$ que contiene a $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)$ *y β_1 está determinado de manera única.*

2. *Si denotamos por $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$ al transformado del álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y por $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}$ el álgebra de eliminación de $\mathcal{G}_1$ (relativa a la proyección β_1). Entonces en el entorno abierto $\mathcal{U}$, se da la igualdad*

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}.$$

Demostración. La demostración se sigue de la discusión previa y la siguiente Proposición. ◌

Proposición 2.4 (Estabilidad de las proyecciones genéricas). *La proyección genérica $\beta : V^{(d)} \longrightarrow V^{(d-1)}$ definida como en* (IV.1.2) *es estable por transformaciones monoidales. Es decir, si $V^{(d)} \xleftarrow{\pi} V_1^{(d)}$ y $V^{(d-1)} \xleftarrow{\widetilde{\pi}} V_1^{(d-1)}$ son las transformaciones monoidales de centro Y y $\beta(Y)$ respectivamente, entonces existe una proyección genérica $\beta_1 : \mathcal{U} \longrightarrow V_1^{(d-1)}$ que está definida en un subconjunto abierto $\mathcal{U} \subset V_1^{(d)}$ tal que β_1 es una proyección genérica transversal.*

Demostración. Bajo las hipótesis de la proposición, existe una proyección definida de forma local en cada carta U_{x_i}, por el polinomio mónico

$$f_1\Big(\frac{z}{x_i}\Big) = \Big(\frac{z}{x_i}\Big)^n + \frac{a_1}{x_i}\Big(\frac{z}{x_i}\Big)^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{x_i^n}.$$

Observamos que para probar la condición geométrica que implica la genericidad de la proyección, basta con probar que $\Delta_1^{(n)}(f_1)(\overline{x})$ es una unidad para $\overline{x} \in U_{x_i}$ y donde $\Delta_1^{(n)}$ es un cierto operador diferencial de orden n relativo a β_1.

Consideremos $\Delta_1^{(b)}$ el operador diferencial relativo definido por el morfismo de Taylor (véase II.1.21). A partir de (III.6), se deduce que

$$\Delta_1^{(n)}(f_1)(\overline{x}) = \Delta^{(n)}(f)(x) = u,$$

donde u es una unidad y $\overline{x}$ se aplica en x vía la transformación monoidal π, es decir, $\pi(\overline{x}) = x$. Por tanto, podemos concluir que la proyección β_1 es transversal. ◌

2.5. Estructuras diferenciales y transformaciones monoidales.

Consideremos las mismas condiciones que previamente: Sean $X \subset V^{(d)}$ una hipersuperficie, $x \in X$ un punto cerrado de multiplicidad máxima n, y $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ una proyección genérica, tal que, localmente, X está definida por un polinomio mónico con coeficientes en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$,

$$f(Z) = Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Consideremos como anteriormente la transformación monoidal de centro liso Y, $V^{(d)} \longleftarrow V_1^{(d)}$. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f(Z)W^n, \Delta^{(e)}(f(Z))W^{n-e}]_{1\leq e\leq n-1}$ el álgebra de Rees diferencial relativa y denotemos por $\mathcal{G}_1$ a su transformada.

En el subconjunto abierto $\mathcal{U} = \bigcup U_{x_i}$, el transformado $\mathcal{G}_1$ está definido como

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(d)}}(U_{x_i})\Big[f_1\Big(\frac{Z}{x_i}\Big)W^n, \Delta_1^{(\alpha)}\Big(f_1\Big(\frac{Z}{x_i}\Big)\Big)W^{n-e}\Big]_{1\leq e\leq n-1},$$

donde f_1 es un polinomio mónico de grado n en la variable $\frac{Z}{x_i}$ y $\Delta_1^{(\alpha)}$ denota el operador diferencial relativo de orden α inducido por la proyección β_1. Así, si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Rees diferencial relativa, entonces $\mathcal{G}_1$ también es un álgebra de Rees diferencial relativa.

A diferencia de esta última afirmación, si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Rees diferencial (absoluta), entonces, en general, no se va a cumplir que $\mathcal{G}_1$ sea diferencial absoluta. Esta afirmación es independientemente de la característica.

Consideremos, por ejemplo, en $k[X, Y, Z]$ el álgebra de Rees diferencial definida como

$$\mathcal{G} = k[X, Y, Z][(Z^2 + X^2Y)W^2, (2Z)W, (X^2)W, (2XY)W].$$

Obsérvese que el origen $\overline{0}$ de $\mathbb{A}_k^3$ es un centro permisible, por tanto consideremos la transformación cuadrática de centro $\langle Z, X, Y\rangle$. El transformado de $\mathcal{G}$, denotémoslo por $\mathcal{G}_1$, en la carta U_X está dado por

$$\mathcal{G}_1 = k[X, Y, Z][(Z^2 + XY)W^2, (2Z)W, (X)W, (2XY)W].$$

Nótese aquí que, por abuso de notación, denotamos por X, Y y Z las nuevas coordenadas en $V_1^{(d)}$ en lugar de usar X, $\frac{Y}{Z}$ y $\frac{Z}{X}$. Utilizaremos esta notación a lo largo de la memoria.

Apliquemos ahora el operador diferencial $\Delta^{(1,0,0)}$ a $Z^2 + XY$, se obtiene así

$$\Delta^{(1,0,0)}(Z^2 + XY) = (Y)W,$$

y por tanto, el elemento YW pertenece al álgebra de Rees diferencial asociada a $\mathcal{G}_1$, pero en cambio $(Y)W \notin \mathcal{G}_1$. Por lo que se puede observar que la estructura diferencial absoluta no es estable por transformaciones monoidales.

2.6. Eliminación, lugar singular y transformaciones monoidales.

Otro hecho importante es entender el comportamiento del lugar singular de las álgebras de Rees al proyectar. En la Proposición V.1.3, hemos probado que existe una biyección entre el conjunto de puntos de multiplicidad n de la hipersuperficie (i.e, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$) y su imagen por β. Más aún, en [56] se muestra que si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Rees diferencial, entonces se cumple la siguiente igualdad

$$\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}),$$

(véase también el Corolario IV.4.4).

En el caso más general en el que $\mathcal{G}$ sea un álgebra diferencial relativa (la propiedad de diferenciabilidad que es compatible con las transformaciones monoidales), a partir de la inclusión de álgebras dada por $\beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \subset \mathcal{G}$, se deduce la inclusión

$$\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}),$$

pero la igualdad, en general, no se cumple, como veremos en el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 2.7. Consideremos la hipersuperficie en $V^{(4)} = \mathbb{A}^4_k$ definida por $T^2 + XYZ$, donde k es un cuerpo de característica 2. Definimos el álgebra de Rees diferencial asociada a la hipersuperficie como

$$\mathcal{G} = G(\mathcal{G}) = \mathcal{O}_{V^{(4)}}[(T^2 + XYZ)W^2, (XY)W, (XZ)W, (YZ)W].$$

El lugar singular de $\mathcal{G}$ es la unión de tres rectas, digamos L_1, L_2 y L_3 (correspondientes a los ejes X, Y y Z).

Sea β la proyección definida por medio de la eliminación de la variable T. Se tiene entonces que $\beta(\mathrm{Sing}\,\mathcal{G}) = \widetilde{L}_1 \cup \widetilde{L}_2 \cup \widetilde{L}_3$, es decir, es la unión de las tres rectas correspondientes a los tres ejes de coordenadas.

Denotemos por $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ al álgebra de eliminación. Esta álgebra, al ser $T^2 + XYZ$ un polinomio puramente inseparable está definida por:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} = \mathcal{O}_{V^{(3)}}[(XY)W, (XZ)W, (YZ)W],$$

(véase la Observación III.2.14). El lugar singular vuelve a ser en este caso $\mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) = \widetilde{L}_1 \cup \widetilde{L}_2 \cup \widetilde{L}_3$, es decir, $\mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) = \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}))$ (como ya sabíamos previamente, ya que $\mathcal{G}$ es diferencial).

Definimos la transformación cuadrática de $\mathbb{A}^4_k$ en el origen $\overline{0}$; y la transformación cuadrática de $\mathbb{A}^3_k$ en $\beta(\overline{0})$ (el origen de $\mathbb{A}^3_k$).

El transformado de $\mathcal{G}$ en la carta en la que dividimos por X, i.e. U_X, viene dado por

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(4)}}(U_X)[(T^2 + XYZ)W^2, (XY)W, (XZ)W],$$

donde de nuevo hacemos un abuso de notación, denotando por X, Y, Z a X,$\frac{Y}{X}$ y $\frac{Z}{X}$. Obsérvese aquí la simetría entre las tres cartas U_Z, U_Y y U_X que cubren $\mathcal{U}$,(véase V.2.2). De nuevo, el lugar singular de $\mathcal{G}_1$ en U_X es una unión de tres rectas que pasan por el origen (los tres ejes).

Se puede observar también que después de la transformación cuadrática, el transformado del álgebra diferencial $\mathcal{G}$, es decir $\mathcal{G}_1$, ya no es diferencial absoluto, aunque sí es diferencial relativo.

Después de la transformación cuadrática en $\beta(\overline{0})$, el transformado de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ en la carta U_X está definido como

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}(U_X)[(XY)W, (XZ)W, (XYZ)W],$$

y como $(XYZ)W$ se puede obtener a partir de $(XY)W$ (o $(XZ)W$), se tiene que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}(U_X)[(XY)W, (XZ)W].$$

Por tanto, ahora el lugar singular de $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}$ es la unión de la hipersuperficie excepcional, $X = 0$, y una recta transversal a esta hipersuperficie (definida por $Y = 0, Z = 0$). Por tanto, se observa con este ejemplo que

$$\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subsetneq \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}).$$

2.8. Diferenciabilidad: característica cero y característica positiva.

Como ya hemos indicado en el Ejemplo V.2.7, después de considerar una transfomación monoidal, se puede producir una exageración del lugar singular del álgebra de eliminación, es decir, se puede dar una inclusión del tipo:

$$\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subsetneq \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}).$$

Esta desigualdad estricta se debe a la pérdida de la diferenciabilidad absoluta en las álgebras después de explosiones. Pero este fenómeno es propio sólo de la característica positiva, es decir, en característica cero se preserva la igualdad de lugares singulares después de explosiones.

Discutiremos a continuación por qué se produce este hecho en característica positiva y por qué en característica cero no supone un problema (y de hecho, es una propiedad fundamental para alcanzar la resolución de singularidades por argumentos inductivos, véase, por ejemplo, [21]).

Partimos de un polinomio mónico de orden n

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

y asociamos a $f_n(z)$ el álgebra de Rees diferencial dada por

$$\mathcal{G} = G(\mathcal{G}) = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_n(z)W^n, \Delta^{\alpha}(f_n(z))]_{1,\leq|\alpha|\leq n-1}.$$

Fijada una proyección genérica $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$, podemos considerar el álgebra de eliminación definida por $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$.

Como ya hemos observado previamente, en el caso diferencial e independientemente de la característica, en [56] se prueba que

$$\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}). \tag{V.2}$$

Ahora bien, veamos con un poco más de detalle lo que sucede en característica 0.

Al ser $\mathcal{G} = G(\mathcal{G})$ diferencial absoluta, en particular es diferencial relativa (respecto de la proyección β). La particularidad que tiene la característica 0 en su comportamiento con los operadores diferenciales es que dado un elemento h de orden m en un punto x, al aplicarle un operador de orden 1, supongamos $D \in Diif^1_k$, el nuevo elemento, $D(h)$, es un elemento no nulo de orden $m-1$ en el punto x. Por otro lado, en característica 0, la composición de los operadores diferenciales de orden 1 generan los operadores diferenciales de orden superior.

En particular, en nuestro contexto, al aplicar el operador diferencial relativo (dado por el morfismo de Taylor) de orden $n-1$ al polinomio f_n, se obtiene un elemento de orden 1, que pertenece al álgebra. Es decir,

$$0 \neq \Delta^{(n-1)}(f_n(z))W^1 = (n \cdot z + a_1)W^1 \in \mathcal{G} \tag{V.3}$$

Es conveniente observar, que para obtener (V.3) es suficiente con que $\mathcal{G}$ sea un álgebra con estructura diferencial relativa. Por el contrario, este hecho es, en general, falso en característica positiva.

Ahora bien, podemos considerar el cambio de variables definido por medio de

$$z \mapsto z - \frac{1}{n}a_1,$$

(a este cambio de variables se le conoce como *Transformación de Tschirnhausen*). Tras este cambio, se obtiene una expresión de f_n dada por

$$f_n(z) = z^n + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n,$$

para ciertos coeficientes $b_i \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$. Observamos ahora que $zW \in \mathcal{G}$. Así, como hicimos en III.2.15 podemos considerar el polinomio característico de la multiplicación por zW^1 $(\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_n(z)\rangle \xrightarrow{\overline{z}W} \mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_n(z)\rangle)$, es decir

$$\psi_{zW}(V) = V^n + b_2 V^{n-2} + \cdots + b_n,$$

y por tanto, de nuevo, $b_j W^j \in \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ para $j = 2, \ldots, n$. Por otro lado, se observa que

$$\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}\left(\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[b_2W^2, \ldots, b_nW^n]\right) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \tag{V.4}$$

y esta igualdad se preserva por transformaciones permisibles, ya que tras una transformación monoidal

$$f_n^{(1)}(z) = z_1^n + b_2^{(1)} z_1^{n-2} + \cdots + b_n^{(1)}$$

es el transformado de $f_n(z)$, donde los $b_j^{(1)}$ son los transformados de b_jW^j $(j = 2, \ldots, n)$.

Resumiendo, en característica 0, la estructura diferencial relativa es suficiente para probar la igualdad de lugares singulares dada por (V.2) y su estabilidad por transformaciones monoidales.

Como ya hemos indicado previamente, el comportamiento de los operadores diferenciales en característica positiva no es tan bueno. En general, a partir de un elemento fW^n de orden n en un punto x, no se puede obtener un elemento en $\mathcal{G}$ con orden 1 en el punto x, ni aún siendo $\mathcal{G}$ diferencial absoluta. Este hecho, hace que no se pueda conservar la igualdad de lugares singulares, ya que para probar V.2 es necesaria la estructura diferencial absoluta.

El caso que mejor revela este hecho es el caso en el que consideremos un polinomio puramente inseparable

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_{p^e},$$

con $a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$. En este caso el álgebra de Rees diferencial relativa viene dada por

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_{V^{(d)}}[(z^{p^e} + a_{p^e})W^{p^e}]$$

y su álgebra de eliminación es nula.

Capítulo VI

El álgebra monomial virtual

1. La pendiente excepcional para una hipersuperficie

1.1. Sean $V^{(d)}$ un esquema liso de dimensión d, $x \in V^{(d)}$ un punto, y $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ una proyección genérica. Fijemos un polinomio mónico de orden p^e, digamos $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$ con $a_i \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$, y fijemos una hipersuperficie excepcional H definida de forma local por $y = 0$ (podría hacerse en un caso más general, donde H no tenga por qué ser necesariamente una hipersuperficie excepcional).

Una inclusión de la forma

$$f_{p^e} W^{p^e} \subset \langle z \rangle W \odot \langle y^h \rangle W^s \tag{VI.1}$$

implica una divisibilidad de cada uno de los coeficientes de $f_{p^e}(z)$ en un sentido ponderado que detallaremos a continuación.

La inclusión dada por (VI.1) implica, en particular, que para cada índice $j \in \{1, \ldots, p^e\}$, se cumple

$$a_j W^j \in \langle y^h \rangle W^s. \tag{VI.2}$$

entendiendo esta inclusión ponderada como: $a_j^s \in \langle y^h \rangle^j$. En general, una pertenencia ponderada del tipo $fW^n \in IW^m$ denotará $f^m \in I^n$.

A partir de (VI.2), podemos considerar la siguiente factorización de los coeficientes,

$$\begin{aligned} a_1 W^1 &= y_1^{r_1} \cdot a_1' W^1, \\ a_2 W^2 &= y_1^{r_2} \cdot a_2' W^2, \\ &\vdots \\ a_{p^e} W^{p^e} &= y_1^{r_{p^e}} \cdot a_{p^e}' W^{p^e}, \end{aligned}$$

donde los a_j' no son divisibles por y (i.e., $\overline{a_j'} \neq 0$ al restringir a la hipersuperficie H, es decir, en $\mathcal{O}_{H,x}$). Nótese que esta factorización es canónica ya que estamos trabajando en un dominio de factorización única.

Nuestro objetivo es encontrar un cierto parámetro transversal z para el que la inclusión (VI.1) sea óptima, es decir, para el que el exponente h sea el mayor posible.

La siguiente definición de pendiente, viene motivada por la factorización y por una inclusión como la dada en (VI.1).

Definición 1.2. Fijado el polinomio mónico $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$, siguiendo la notación anterior, definimos la *pendiente relativa a* $H = \{y = 0\}$ *respecto de la sección* z como

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \min_{1 \leq j \leq p^e} \left\{ \frac{r_j}{j} \right\}.$$

Observación 1.3. A partir de la definición de pendiente, se puede considerar una inclusión como la dada en (VI.1). Nótese que la definición del entero s no es única, pero basta tomar $s = p^e!$ o un múltiplo de $p^e!$.

Observación 1.4. Probaremos más adelante que la definición de la pendiente es independiente de la elección del parámetro y elegido para definir la hipersuperficie H.

Observación 1.5. La pendiente de $f_{p^e}(z)$ relativa a y, $Sl_H(f_{p^e}, z)$, depende de la elección del parámetro transversal z, es decir, después un cambio de variable de la forma $z' = uz + \alpha$ con $u, \alpha \in \mathcal{O}_{V(d-1)}$ y u unidad, la pendiente de $f_{p^e}(z')$ relativa a y, $Sl_H(f_{p^e}, z')$, puede variar.

Ejemplo 1.6. Veamos un ejemplo con el que ilustrar el hecho de que la pendiente de $f(z)$ relativa a y depende de la elección del parámetro transversal z. Consideremos el polinomio

$$f(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = z^2 + \underbrace{y^2 x^3}_{a_1} z + \underbrace{y^7 x}_{a_2},$$

y supongamos que localmente $y = 0$ es la componente excepcional respecto de la que queremos calcular la pendiente. Factorizamos como previamente (en este caso podemos suponer $s = 2$) y llegamos a

$$\begin{aligned} a_1 W^1 &= y^2 \cdot x^3 W^1 \\ a_2 W^2 &= y^7 \cdot x W^2 \end{aligned}$$

y entonces,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{7}{2} \right\} = 2.$$

Consideremos ahora el cambio de variables definido por $z' = z + yx$, obteniéndose

$$f'(z) = z'^2 + \underbrace{y^2 x^3}_{\widetilde{a}_1} z' + \underbrace{y^7 x + y^3 x^4 + y^2 x^2}_{\widetilde{a}_2},$$

y la factorización

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_1 W^1 &= y^2 \cdot x^3 W^1,\\ \widetilde{a}_2 W^2 &= y^2 \cdot (x^2 + yx^4 + y^5 x) W^2,\end{aligned}$$

y por tanto,

$$Sl_H(f_{p^e}, z') = \text{mín}\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1 \neq 2.$$

La pendiente ha cambiado.

1.7. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las pendientes respecto de los cambios de variables de la forma $uz + \alpha$, donde $u, \alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},x}$ y u sea una unidad.

Veamos primero los diferentes casos en los que puede darse la pendiente:

Observación 1.8. Fijado como previamente un parámetro z y el polinomio mónico, $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e - 1} + \cdots + a_{p^e}$, distinguiremos los siguientes casos:

(A) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_j}{j}$ para un índice $j < p^e$.

(B) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_j}{j}$ para todo $j = 1, \ldots, p^e - 1$.

(B1) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$.

(B2) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y a_{p^e} puede expresarse como

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}} g_0 + y^{r_{p^e}+1} g_1 + \cdots,$$

donde $g_\ell \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$ no es divisible por y (para $\ell = 0, \ldots$) y g_0 no es una potencia p^e.

(B3) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y a_{p^e} se puede expresar como

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}} g_0 + y^{r_{p^e}+1} g_1 + \cdots,$$

donde $g_\ell \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$ no es divisible por y (para $\ell = 0, \ldots$) y g_0 es una potencia p^e.

Observación 1.9. En la observación anterior (Observación VI.1.8), estamos considerando, por simplicidad, la expresión de a_{p^e} en el completado, pero se podría considerar la factorización de a_{p^e} dada por:

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}} g,$$

donde g es una unidad en el anillo local de la hipersuperficie $y = 0$.

Observación 1.10. Podemos reducir los cambios de variable generales $z_1 = uz + \alpha$, a cambios de la forma $z_1 = z + \alpha$.

Supongamos que consideramos un cambio de la forma $z_1 = uz$ donde u es una unidad. Tras este cambio, se tiene

$$f_{p^e}(z_1) = (u^{-1})^{p^e} z_1^{p^e} + (u^{-1})^{p^e-1} a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e},$$

y salvo producto por unidad,

$$u^{p^e} f_{p^e}(z_1) = z_1^{p^e} + u a_1 z^{p^e-1} + \cdots + u^{p^e} a_{p^e}.$$

Los nuevos coeficientes son de la forma

$$\widetilde{a}_\ell = u^\ell a_\ell \quad \text{para } \ell = 1, \ldots, p^e,$$

por tanto, para cualquier argumento que realicemos de factorización en términos de y, este producto por una unidad es superfluo.

Estudiemos ahora el comportamiento de la pendiente tras cambios de variables de la forma $z_1 = z - \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},x}$. Estaremos especialmente interesados en entender los casos en los que la pendiente pueda mejorar (aumentar) tras un cambio de esta forma.

Vamos a dividir nuestra argumentación en dos casos diferenciados. En el primero, la pendiente está dada por un coeficiente intermedio (distinto del término independiente); y en el segundo, es el término independiente a_{p^e} el que nos proporciona la pendiente.

Veremos que en el primero de los casos (Caso (A)), no se podrá alcanzar una mejora de la pendiente por ningún cambio de variable. Es más, si tras un cambio de variable de la forma $uz + \alpha$, la pendiente no empeora (se mantiene igual), entonces de nuevo estaremos en un Caso (A) (la pendiente se alcanza en un término intermedio).

En el segundo de los casos (Caso (B)), veremos que únicamente se produce una mejora de la pendiente en el Caso (B3) y que (B1) y (B2) son estables.

1.11. Caso (A): La pendiente la proporciona un término intermedio. O dicho de otra forma,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n}, \quad \text{con } n \in \{1, \ldots, p^e - 1\}.$$

Denotemos por n el menor índice para el que se alcanza la pendiente, es decir,

$$\begin{cases} \dfrac{r_n}{n} < \dfrac{r_j}{j} & \text{para todo } j \in \{1, \ldots, n-1\} \\[2ex] \dfrac{r_n}{n} \leq \dfrac{r_k}{k} & \text{para todo } k \in \{n+1, \ldots, p^e\}. \end{cases} \tag{VI.3}$$

Tras un cambio de variables arbitrario de la forma $z_1 = z - y^{\square}\alpha$ donde $\square \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, el nuevo coeficiente de orden $p^e - n$, denotémosle por $\widetilde{a}_n$, está dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_n &= c_1 y^{(n-1)\square}\alpha^{n-1}a_1 + \cdots + c_{n-1}y^{\square}\alpha a_{n-1} + a_n\\ &= c_1 y^{(n-1)\square+r_1}\alpha^{n-1}a'_1 + \cdots + c_{n-1}y^{\square+r_{n-1}}\alpha a'_{n-1} + y^{r_n}a'_n.\end{aligned}$$

donde los $c_j \in k$ denotan los coeficiente binomiales definidos como

$$c_j = \binom{p^e - j}{n-j} \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

y los a'_j no son divisibles por y.

Observación 1.12. Si $(n-j)\square + r_j > r_n$ para todo índice $j = 1, \ldots, n-1$, entonces la pendiente $Sl_H(f_{p^e}, z_1)$ no aumenta, ya que

$$\widetilde{a}_n = y^{r_n}\widetilde{a}'_n,$$

donde $\widetilde{a}'_n$ no es divisible por y. Por tanto,

$$Sl_H(f_{p^e}, z_1) = \min_{1\leq j\leq p^e}\left\{\frac{\widetilde{r}_j}{j}\right\} \leq \frac{r_n}{n}.$$

Veamos entonces, qué sucede si suponemos que existe algún índice $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ para el que se cumple

$$(n-j)\square + r_j \leq r_n \tag{VI.4}$$

Una vez realizado un cambio de variable que cumpla la condición (VI.4), el nuevo exponente de la factorización de $\widetilde{a}_n$, denotémoslo por $\widetilde{r}_n$, podría aumentar.

En el caso en el que $\widetilde{r}_n > r_n$, probaremos en la discusión que sigue a continuación, que la pendiente $Sl_H(f_{p^e}, z')$, no aumenta (de hecho, disminuye) tras el cambio de variable. Este hecho, lo vamos a ver reflejado en el coeficiente $\widetilde{a}_{p^e}$.

Consideremos el nuevo término independiente, $\widetilde{a}_{p^e}$, después del cambio de variables:

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_{p^e} &= f_{p^e}(y^{\square}\alpha) = y^{\square p^e}\alpha^{p^e} + a_1 y^{\square(p^e-1)}\alpha^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}\\ &= y^{\square p^e}\alpha^{p^e} + y^{\square(p^e-1)+r_1}\alpha^{p^e-1}a'_1 + \cdots + y^{\square + r_{p^e-1}}\alpha a'_{p^e-1} + y^{r_{p^e}}a'_{p^e}.\end{aligned}$$

Bajo esta hipótesis se cumple el siguiente Lema que dará información precisa sobre la factorización del nuevo coeficiente $\widetilde{a}_{p^e}$ en términos de y:

Lema 1.13. *Consideremos la notación introducida previamente y supongamos que el cambio de variables realizado cumple la condición (VI.4). Entonces:*

(1) *Se cumple que*

$$\square p^e < \square(p^e - \ell) + r_\ell \quad \textit{para todo } \ell = 1, \ldots, p^e.$$

(2) *Adicionalmente,*

$$\frac{\square p^e}{p^e} < \frac{r_n}{n}.$$

Demostración. Comenzaremos probando el primer apartado. Para llegar a una contradicción, supongamos que existe un índice $\ell \in \{1, \ldots, p^e\}$, para el cual

$$\square p^e \geq \square(p^e - \ell) + r_\ell.$$

Esta condición se puede reescribir como

$$\square \geq \frac{r_\ell}{\ell}.$$

Ahora bien, aplicando las condiciones establecidas en (VI.3), se deduce que

$$\frac{r_\ell}{\ell} \geq \frac{r_n}{n}$$

para $\ell = 1, \ldots, p^e$, y por tanto

$$\square \geq \frac{r_n}{n}, \tag{VI.5}$$

La condición (VI.4),

$$\square(n - j) + r_j \leq r_n \quad \text{para cierto } j \in \{1, \ldots, n-1\}$$

se puede reescribir como,

$$\square \leq \frac{r_n - r_j}{n - j}. \tag{VI.6}$$

Usando ahora (VI.5) y (VI.6), se llega a que

$$\frac{r_n}{n} \leq \frac{r_n - r_j}{n - j} \iff (n-j)r_n \leq nr_n - nr_j \iff \frac{r_j}{j} \leq \frac{r_n}{n},$$

donde la última equivalencia contradice las hipótesis consideradas en (VI.3). Queda así demostrado que $\square p^e < \square(p^e - \ell) + r_\ell$ para todo $\ell = 1, \ldots, p^e$.

Veamos ahora el segundo apartado del Lema. De nuevo, para llegar a una contradicción, supongamos que

$$\frac{\square p^e}{p^e} \geq \frac{r_n}{n},$$

i.e.,

$$\square \geq \frac{r_n}{n}.$$

Se observa ahora que llegamos a una condición equivalente a la condición dada por (VI.5) en la prueba del primer apartado del Lema. Por tanto, argumentando como previamente llegamos a contradicción con la hipótesis (VI.4). Se cumple así la desigualdad enunciada. ⥀

Observación 1.14. Considerando la expresión del término independiente $\widetilde{a}_{p^e}$ obtenido tras el cambio de variables, el Lema VI.1.13 anterior se puede reescribir como:

Si se cumple (VI.4), es decir, existe algún índice $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ para el que

$$(n-j)\square + r_j \leq r_n.$$

Entonces:

1. Se tiene la siguiente factorización

$$\widetilde{a}_{p^e} = y^{\square p^e} \widetilde{a}'_{p^e},$$

   donde $\widetilde{a}'_{p^e}$ no es divisible por y.

2. La nueva pendiente ha empeorado, es decir,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n} > \square \geq Sl_H(f_{p^e}, z_1).$$

Por tanto, estamos en condiciones de enunciar la siguiente Proposición:

Proposición 1.15. (Estabilidad del Caso (A)). *Supongamos que estamos en un Caso* (A)*, es decir, la pendiente $Sl_H(f_{p^e}, z)$ está proporcionada por un coeficiente intermedio,*

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n}, \quad para\ n \in \{1, \ldots, p^e - 1\}.$$

Entonces, ningún cambio de variable de la forma $z_1 = z - \alpha$ (donde $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$) permite incrementarla. Es decir, $\frac{r_n}{n} = Sl_H(f_{p^e}, z)$ será el valor máximo que se pueda alcanzar.

De hecho, cualquier cambio de variable que conserve la pendiente, conservará además el Caso (A)*, es decir, la nueva pendiente estará proporcionada por un término intermedio.*

1.16. Caso (B): La pendiente la proporciona el término independiente. O dicho de otra forma,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_\ell}{\ell} \quad \text{para todo } \ell \in \{1, \dots, p^e - 1\}. \tag{VI.7}$$

Consideramos un cambio de variables de la forma $z_1 = z - y^{\square}\alpha$, donde $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$. Tras este cambio de variables, el nuevo término independiente, $\widetilde{a}_{p^e}$, es de la forma

$$\widetilde{a}_{p^e} = y^{\square p^e}\alpha^{p^e} + y^{\square(p^e-1)+r_1}\alpha^{p^e-1}a'_1 + \cdots + y^{\square + r_{p^e-1}}\alpha a'_{p^e-1} + y^{r_{p^e}}a'_{p^e}.$$

Supongamos primero que $\square p^e < r_{p^e}$. Bajo esta hipótesis, en el siguiente Lema mostraremos que la pendiente empeora.

Lema 1.17. *Con la notación anterior, si* $\square p^e < r_{p^e}$*, entonces,*

$$\square(p^e - \ell) + r_\ell > \square p^e,$$

para cualquier $\ell \in \{1, \dots, p^e\}$.

Demostración. Supongamos que no se cumple la desigualdad, es decir, supongamos que para algún $\ell \in \{1, \dots, p^e\}$

$$\square(p^e - \ell) + r_\ell \leq \square p^e.$$

Equivalentemente, esta última desigualdad se reformula en términos de las siguientes condiciones equivalentes

$$\square \ell \geq r_\ell \iff \square \geq \frac{r_\ell}{\ell}.$$

Por otro lado, estamos suponiendo que $\frac{r_\ell}{\ell} > \frac{r_{p^e}}{p^e}$, por tanto

$$\square \geq \frac{r_\ell}{\ell}.$$

lo que contradice la hipótesis impuesta para $\square$. ↺

La condición que se deduce del Lema VI.1.17 implica en particular que

$$\widetilde{a}_{p^e} = y^{\square p^e}\widetilde{a}'_{p^e},$$

donde $\widetilde{a}'_{p^e}$ no es divisible por y. En particular, dado que, $\square p^e < r_{p^e}$, se deduce que la nueva pendiente ha empeorado (es menor), es decir,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} > \square \geq Sl_H(f_{p^e}, z_1).$$

Supongamos ahora que $\square p^e \geq r_{p^e}$. Se sigue entonces el siguiente Lema que va a permitir un mejor estudio del comportamiento de la pendiente:

Lema 1.18. *Supongamos que* $\square p^e \geq r_{p^e}$*. Entonces se cumple la siguiente desigualdad,*

$$\square(p^e - \ell) + r_\ell > r_{p^e},$$

para todo índice $\ell = 1, \dots, p^e - 1$*.*

Demostración. Supongamos que no se cumple la desigualdad del Lema, es decir, supongamos que existe un índice $\ell \in \{1, \dots, p^e - 1\}$ para el que se cumple

$$\square(p^e - \ell) + r_\ell \leq r_{p^e}.$$

Esta condición es equivalente a

$$\square \leq \frac{r_{p^e} - r_\ell}{p^e - \ell}.$$

Por otro lado, veamos que se cumple que

$$\frac{r_{p^e} - r_\ell}{p^e - \ell} < \frac{r_{p^e}}{p^e}.$$

Para verlo, supongamos que no se cumple esta desigualdad, es decir, supongamos que

$$\frac{r_{p^e} - r_\ell}{p^e - \ell} \geq \frac{r_{p^e}}{p^e},$$

o equivalentemente

$$p^e r_{p^e} - p^e r_\ell \geq (p^e - \ell) r_{p^e} \iff \frac{r_{p^e}}{p^e} \geq \frac{r_\ell}{\ell},$$

donde la última desigualdad contradice la condición dada en (VI.7).

Así,

$$\square \leq \frac{r_{p^e} - r_\ell}{p^e - \ell} < \frac{r_{p^e}}{p^e},$$

lo que contradice la Hipótesis del Lema: $\square p^e \geq r_{p^e}$. ⥀

A partir del Lema VI.1.18 podemos deducir que el nuevo término independiente es

$$\widetilde{a}_{p^e} = y^{\square p^e} \alpha^{p^e} + y^{r_{p^e}} a'_{p^e} + y^N A, \tag{VI.8}$$

donde $A \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}, \beta(x)}$, $N > \square p^e$ y $N > r_{p^e}$.

Así, si $\square p^e > r_{p^e}$, la nueva pendiente no puede mejorar, ya que entonces

$$Sl_H(f_{p^e}, z_1) \leq \frac{r_{p^e}}{p^e} = Sl_H(f_{p^e}, z).$$

Por tanto, la única opción de mejora se produce en el caso en el que $\square p^e = r_{p^e}$, es decir, en el caso en el que r_{p^e} sea un múltiplo de p^e. Adicionalmente, para que se produzca un aumento de la pendiente, tenemos que conseguir cancelaciones entre los términos inciales (en y) de $y^{\square p^e}\alpha^{p^e}$ e $y^{r_{p^e}}a'_{p^e}$. Entonces, además, el término independiente a_{p^e} tiene que ser tal que

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}}(g_0 + yg_1 + \dots)$$

con g_ℓ no divisible por y ($\ell = 0, \dots$) y con g_0 una potencia p^e.

Podemos así enunciar los siguientes dos resultados:

Proposición 1.19. (Estabilidad de los Casos (B1) y (B2)) *En los casos* (B1) *y* (B2) *la pendiente no puede mejorar tras cambios de variables de la forma $z_1 = z + \alpha$ (con $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$), es decir,*

$$Sl_H(f_{p^e}, z_1) \leq Sl_H(f_{p^e}, z).$$

Además, en el caso en el que la pendiente no empeore (se da la igualdad tras el cambio de variables), los casos (B1) *y* (B2) *se preservan.*

Por tanto, uniendo los resultados enunciados en la Proposición VI.1.15 y en la Proposición VI.1.19 se ve que los casos (A), (B1) y (B2) son estables por cambios de variables que conserven la pendiente. De hecho, observando el Caso (B3) y la escritura del nuevo término independiente, $\widetilde{a}_{p^e}$, (véase (VI.8)), observamos que en este caso la pendiente sí es mejorable, como se enuncia en el siguiente Corolario:

Corolario 1.20. *El caso* (B3) *es el único caso en el que la pendiente es mejorable.*

Observación 1.21. Si estamos en el caso (B3), tras un cambio de variables en el que mejoremos la pendiente, podemos desembocar en cualquiera de los casos posibles. Es decir, este caso no es estable.

1.22. El caso (B3): Crecimiento de la pendiente.

Veremos ahora que existe un proceso de limpieza de potencias p^e en el caso (B3), a partir del cual, conseguiremos incrementar la pendiente. Más aún, afirmamos que este proceso finaliza tras una cantidad finita de pasos consiguiéndose así pasar a uno de los casos anteriores ((A), (B1) o (B2)).

En primer lugar, recordemos que hemos fijado un parámetro transversal z, un polinomio mónico $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$ y una hipersuperficie excepcional $H = \{y = 0\}$ tal que $Sl_H(f_{p^e}, z)$ es del tipo (B3), es decir,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_j}{j} \quad \text{para } \ell = 1, \dots, p^e - 1, \tag{VI.9}$$

y el coeficiente independiente es

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}}(g_0 + yg_1 + \dots),$$

donde los g_ℓ no son divisibles por y, r_{p^e} es múltiplo de p^e y g_0 es una potencia p^e.

Como observamos previamente, el único cambio de variable con el que podemos aumentar la pendiente tiene que ser de la forma $z_1 = z - y^{\square}\alpha$, con $\square = \frac{r_{p^e}}{p^e}$. Por otro lado, tras este cambio de variables, el nuevo término independiente, $\widetilde{a}_{p^e}$, es de la forma

$$\widetilde{a}_{p^e} = y^{\square p^e}\alpha^{p^e} + a_{p^e} + y^N A,$$

donde $A \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, $N > \square p^e$ y $N > r_{p^e}$.

Con estas condiciones, el cambio de variables que tenemos que realizar tiene que ser más particular, tiene que ser de la forma

$$z_1 = z - y^{\frac{r_{p^e}}{p^e}}\alpha,$$

donde $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$ es tal que

$$\overline{\alpha}^{p^e} = \overline{g}_0, \tag{VI.10}$$

denotando con las barras la clase en $\mathcal{O}_{H,\beta(x)}$.

Proposición 1.23. *Supongamos que estamos en el caso* (B3) *y que realizamos un cambio de variables de la forma $z_1 = z - \alpha y^{\frac{r_{p^e}}{p^e}}$ (con $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$). Entonces, tras el cambio la pendiente no empeora (no disminuye).*

En particular, si consideramos un cambio más particular, para el que α cumple (VI.10)*, entonces la pendiente aumenta.*

Demostración. Denotamos el cambio de variables por $z_1 = z - y^{\square}\alpha$ donde ahora $\square = \frac{r_{p^e}}{p^e}$. Tras el cambio de variables, usando la notación de (VI.8)

$$\widetilde{a}_{p^e} = \alpha^{p^e} y^{r_{p^e}} + y^{r_{p^e}} a'_{p^e} + y^N A = y^{\widetilde{r}_{p^e}} \widetilde{a}'_{p^e},$$

donde en particular se tiene que $\widetilde{r}_{p^e} \geq r_{p^e}$. Nótese aquí, que si el cambio de variables es más particular como el dado en (VI.10), entonces hay una cancelación entre $y^{r_{p^e}}\alpha^{p^e}$ y a'_{p^e} (limpieza de potencias p^e) y por tanto, en este caso $\widetilde{r}_{p^e} > r_{p^e}$.

Ahora, veamos qué sucede con el resto de coeficientes tras el cambio de variables:

$$\widetilde{a}_n = y^{\square(n-1)+r_1}\alpha^{n-1}a'_1 + \dots + y^{r_n}a'_n = y^{\widetilde{r}_n}\widetilde{a}'_n,$$

para todo $n = 1, \ldots, p^e - 1$.

Afirmamos que

$$\frac{\square(n-j) + r_j}{n} > \frac{r_{p^e}}{p^e} \quad \text{para } j = 1, \ldots, p^e$$

o lo que es equivalente

$$\frac{\frac{r_{p^e}}{p^e}(n-j) + r_j}{n} > \frac{r_{p^e}}{p^e}.$$

Veámoslo. Esta desigualdad se reformula como cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes,

$$(n-j)r_{p^e} + p^e r_j > n r_{p^e} \iff p^e r_j > j r_{p^e} \iff \frac{r_j}{j} > \frac{r_{p^e}}{p^e},$$

donde la última afirmación se cumple por la hipótesis introducida en (VI.9).

Por tanto, se cumple que

$$\frac{\widetilde{r}_n}{n} > \frac{r_{p^e}}{p^e} \quad \text{para } n = 1, \ldots, p^e - 1.$$

Y por tanto,

$$Sl_H(f_{p^e}, z_1) = \min_{1 \leq j \leq p^e} \left\{ \frac{r_j}{j} \right\} \geq \frac{r_{p^e}}{p^e} = Sl_H(f_{p^e}, z),$$

siendo una desigualdad estricta al considerar el cambio de variable adecuado para la limpieza de las potencias p^e. $\circlearrowleft$

1.24. Algoritmo de limpieza de potencias p^e. Supongamos de partida que estamos en la situación en la que $Sl_H(f_{p^e}, z)$ está en el caso (B2) o (B3), es decir, es tal que

$$\begin{cases} Sl_H(f_{p^e}, z) < \dfrac{r_n}{n} & \text{para } n = 1, \ldots, p^e - 1 \\[2ex] Sl_H(f_{p^e}, z) = \dfrac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{cases}$$

Para limpiar las potencias p^e, en el caso en el que se pueda (caso (B3)) vamos a seguir el siguiente algoritmo:

1.- Explotamos $\frac{r_{p^e}}{p^e}$ veces en codimensión 2 a lo largo de $\langle z, y \rangle$ (y los sucesivos transformados, considerando siempre la carta en la que obtenemos toda la información, es decir, en la que dividimos por y). Obtenemos el morfismo $V^{(d)} \longrightarrow V_1^{(d)}$, que no es un isomorfismo (si $e \geq 1$) .

2.- Vamos a definir una condición geométrica que aparecerá a lo largo del capítulo en un contexto más general y que nos será de especial utilidad a la hora de definir el algoritmo de limpieza. Esta condición diferenciará las componentes del lugar excepcional:

(CD) $\quad \operatorname{Sing}\left(f_{p^e} W^{p^e}|_{\{y=0\}}\right)$ tiene codimensión pura 1 en $\{y=0\}$.

En particular, si la condición (CD) se cumple, se observa que f_{p^e} es una potencia p^e de una hipersuperficie lisa en $\{y=0\}$.

Estudiamos la condición (CD) para la hipersuperficie excepcional obtenida tras la explosiones anteriores (denotamos, haciendo un abuso de notación, a esta hipersuperficie por $y=0$ y al transformado del polinomio por $f_{p^e}(z)$).

2.1.- Si la condición (CD) NO se cumple, entonces el proceso de limpieza **finaliza**.

2.2.- Si la condición (CD) SÍ se cumple, entonces considerando la restricción a $y=0$ se tiene que

$$\overline{f_{p^e}(z)} = z^{p^e} + \overline{a} \qquad \text{con } \overline{a} \text{ una potencia de } p^e.$$

Ahora, podemos levantar $\overline{a}$ a un elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{V_1^{(d)}}$ con la condición de que $\overline{\alpha} = \overline{a}$ en $\mathcal{O}_{V_1^{(d)}}/\langle y\rangle$ y α no divisible por y.

Realizamos el cambio de variables dado por $z = z_1 - \alpha$ obteniendo ahora un nuevo polinomio, $f_{p^e}(z_1)$, donde todos los coeficientes son divisibles por y (recordemos que $\frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_n}{n}$ para todo $n \in \{1,\ldots,p^e-1\}$), por tanto, podemos calcular la nueva pendiente de $f_{p^e}(z_1)$ relativa a y, $Sl_H(f_{p^e}, z_1)$.

Nótese que el cambio de variables $z = z_1 - \alpha$, se puede realizar extender a un cambio de variables $z = z_1 - \gamma$ con $\gamma \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$. El elemento α se puede levantar a un elemento de $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ que no se anule en $\{y=0\}$, basta entonces considerar $\gamma = y^{\frac{r_{p^e}}{p^e}}\alpha$.

2.2.1.- Si $Sl_H(f_{p^e}, z_1)$ es de la forma (A), (B1) o (B2), el proceso **finaliza**.

2.2.2.- Si $Sl_H(f_{p^e}, z_1)$ es de la forma (B3), entonces volvemos a empezar con el algoritmo, es decir, **volvemos al paso** 1 renombrando $\frac{r_{p^e}}{p^e}$ por el valor de la nueva pendiente $Sl_H(f_{p^e}, z_1)$.

Este algoritmo que acabamos de describir sabemos que finaliza (en una cantidad finita de pasos) ya que este proceso de explosiones en codimensión 2, es un proceso intermedio a la normalización. Por tanto, por la finitud de la normalización, podemos deducir la finitud del proceso.

Ejemplo 1.25. Consideremos sobre un esquema liso de dimensión 2, $V^{(2)}$, el polinomio $f(z) = z^2 + x^4 z + x^4$, donde podemos pensar que $\{x = 0\} = H$ define localmente el lugar excepcional. Es fácil ver que $f(z)$ está en un caso (B3), ya que si consideramos la factorización de los coeficientes en función del excepcional

$$a_1 W^1 = (x^4 \cdot 1)W^1, \quad a_2 W^2 = (x^4 \cdot 1)W^2,$$

la pendiente es

$$Sl_H(f, z) = \text{mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2}$$

y se alcanza en el último coeficiente, además $\frac{r_2}{2} = \frac{4}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es decir, podemos llevar a cabo un proceso de limpieza.

Siguiendo el algoritmo definido en VI.1.24, realizaremos 2 explosiones en codimensión 2, es decir, a lo largo de $\langle z, x\rangle$ (y transformado), obteniendo que el transformado de $f(z)$ en la carta U_x, digamos $f_1(z)$, es

$$f_1(z) = z^2 + x^2 z + 1.$$

Restringiendo el polinomio a $x = 0$, se tiene que $\overline{f}(z) = z^2 + 1$ es una potencia 2. Por tanto se cumple la condición (CD) y $\alpha = 1$.

Siguiendo el algoritmo, en $\mathcal{O}_{V^{(2)}}$, podemos realizar el cambio de variables dado por $z_1 = z - \alpha x^{\frac{4}{2}}$, tras el que se llega a

$$f(z_1) = z_1^2 + x^4 z_1 + x^6.$$

Se observa que en este caso, la pendiente viene dada por

$$Sl_H(f, z_1) = \text{mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{6}{2},$$

y ha aumentado respecto a la pendiente $Sl_H(f, z)$ $(= \frac{4}{2})$. Observamos también que $f(z_1)$ vuelve a estar en un caso (B3), ya que la pendiente se alcanza únicamente en el término independiente y $\frac{\widetilde{r_2}}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Volvemos a aplicar el algoritmo, esta vez realizando 3 blow-ups a lo largo de $\langle z, x\rangle$ (y transformados), llegando a

$$f_1(z_1) = z_1^2 + x z_1 + 1,$$

restringiéndonos a la hipersuperficie excepcional vemos que se vuelve a cumplir la condición (CD) y que en este caso $\widetilde{\alpha} = 1$.

Por tanto, consideramos el cambio de variables dado por $z_2 = z_1 - \widetilde{\alpha} x^{\frac{6}{2}}$ tras el cual, el polinomio se expresa como

$$f(z_2) = z_2^2 + x^4 z_2 + x^7.$$

Podemos calcular de nuevo la pendiente, obteniendo que

$$Sl_H(f, z_2) = \text{mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{7}{2}\right\} = \frac{7}{2}.$$

Observamos ahora que el polinomio se encuentra en un caso (B1), ya que el mínimo se alcanza únicamente en el último coeficiente y $\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Este valor no se podrá aumentar por ningún cambio de variable.

1.26. La forma normal. La siguiente definición, que será muy útil en lo que resta, surge de manera muy natural tras la discusión previamente mantenida.

Definición 1.27. Fijado un parámetro z, una hipersuperficie $H = \{y = 0\}$ y el polinomio mónico, $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$. Diremos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en *forma normal* (relativa a $y = 0$) si se cumple alguna de las tres condiciones siguientes:

(A) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_j}{j}$ para un índice $j < p^e$.

(B) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_j}{j}$ para todo $j = 1, \ldots, p^e - 1$.

- (B1) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$.
- (B2) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y a_{p^e} puede expresarse como

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}} g_0 + y^{r_{p^e}+1} g_1 + \cdots ,$$

donde $g_\ell \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$ no es divisible por y (para $\ell = 0, \ldots$) y g_0 no es una potencia p^e.

Proposición 1.28. (Estabilidad de la forma normal). *Fijado un polinomio mónico f_{p^e}, siempre existe un parámetro transversal z para el cual $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal.*

Por otro lado, si el polinomio $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal, entonces $Sl_H(f_{p^e}, z)$ es la máxima pendiente que se puede alcanzar por cambios de la forma $z_1 = uz - \alpha$, con $\alpha, u \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ y u una unidad. Más aún, si un cambio de variables conserva la pendiente, entonces la forma normal se mantiene y, de hecho, se mantiene el tipo en que aparecía (tipos (A), (B1) *o* (B2)*).*

Demostración. Se sigue de la discusión previa. ◌

2. La pendiente excepcional para un álgebra

2.1. En esta sección vamos a generalizar la noción de pendiente que hemos introducido para una hipersupeficie fijada en la Sección VI.1 al contexto de álgebras de Rees.

Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees en el medio ambiente de dimensión d, $V^{(d)}$ y fijemos una proyección genérica en el espacio de dimensión $d-1$, digamos $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$. Supongamos que $\mathcal{G}$ es un álgebra diferencial relativa a la proyección β y denotemos por $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ el álgebra de eliminación que surge en este contexto.

En el Teorema IV.3.2, hemos visto que existe un polinomio mónico de grado p^e, digamos f_{p^e}, tal que se cumple la siguiente igualdad de álgebras (a menos de clausura entera):

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e} W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f_{p^e}) W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \beta^*(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}), \tag{VI.11}$$

donde los Δ^{α} denotan los operadores diferenciales relativos a β de orden α.

Fijemos una hipersuperficie excepcional $H \subset V^{(d)}$ que identificaremos con la hipersuperficie excepcional $\beta(H) \subset V^{(d-1)}$. Vamos a generalizar, en este nuevo contexto, las definiciones que dimos a lo largo de la Sección VI.1.

Recordemos primero la definición de pendiente dada en la Definición VI.1.2. Fijamos un parámetro transversal z de tal forma que

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}.$$

Supongamos que localmente la hipersuperficie H está definida como $H = \{y = 0\}$, consideramos entonces la factorización ponderada de los coeficientes en términos de y,

$$\begin{aligned} a_1 W^1 &= y_1^{r_1} \cdot a'_1 W^1, \\ a_2 W^2 &= y_1^{r_2} \cdot a'_2 W^2, \\ &\vdots \\ a_{p^e} W^{p^e} &= y_1^{r_{p^e}} \cdot a'_{p^e} W^{p^e}, \end{aligned}$$

donde cada a'_j no es divisible por y. Bajo estas condiciones definíamos la pendiente de f_{p^e} relativa a H respecto de z como

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{\frac{r_j}{j}\right\}.$$

Observación 2.2. Es sencillo observar que si consideramos el polinomio definido por $\Delta^{\alpha}(f_{p^e}(z))W^{p^e}$ y estudiamos un análogo a la pendiente para este polinomio (que no es mónico), se obtendría

$$Sl_H(f_{p^e}, z) \leq Sl_H(\Delta^{\alpha}(f_{p^e}), z),$$

ya que los coeficientes a tener en cuenta son algunos de los de $f_{p^e}(z)$ y se encuentran virtualmente ubicados en el mismo peso, i.e. $a_j W^j$.

A partir de esta Observación y de la presentación local dada en (VI.11), la siguiente definición de la pendiente del álgebra de Rees $\mathcal{G}$ surge de manera muy natural:

Definición 2.3. Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees $\mathcal{G}$, fijemos una proyección genérica $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$, una hipersuperficie excepcional definida localmente por $H = \{y = 0\}$ y un parámetro transversal z. Se define la *pendiente de $\mathcal{G}$ relativa a H respecto de z* como

$$Sl_H(\mathcal{G}, z) := \min_{1 \le j \le p^e} \left\{ \frac{r_j}{j}, \operatorname{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \right\} = \min\{Sl_H(f_{p^e}, z), \operatorname{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})\}.$$

Teorema 2.4. *Fijado un parámetro transversal z, si $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n}$ para algún índice $n \in \{1, \ldots, p^e - 1\}$, entonces*

$$\operatorname{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \le Sl_H(f_{p^e}, z).$$

En consecuencia,

$$Sl_H(\mathcal{G}, z) = \operatorname{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}).$$

Demostración. Denotemos por n al primer índice para el que se alcanza la pendiente $Sl_H(f_{p^e}, z)$, es decir,

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \dfrac{r_n}{n} < \dfrac{r_k}{k} \text{ para } k = 1, \ldots, n-1, \\ \dfrac{r_n}{n} \le \dfrac{r_\ell}{\ell} \text{ para } \ell = n+1, \ldots, p^e. \end{cases} \tag{VI.12}$$

Nótese que por la hipótesis de partida, $n < p^e$.

Consideramos la diferencial relativa a β de orden $p^e - n$ aplicada a $f_{p^e}(z)$,

$$\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z)) = c_1 a_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} a_{n-1} z + a_n,$$

donde los c_i's denotan el número combinatorio $\left(\begin{array}{c} p^e - i \\ n - i \end{array} \right)$.

Queremos estudiar los elementos que se obtienen a partir de este elemento $\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z))W^n$ en el álgebra de eliminación, es decir, queremos estudiar los coeficientes del polinomio característico del morfismo multiplicación $\theta_{\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z))W^n}$. En particular, nos bastará con analizar la norma, es decir, con estudiar el término independiente del polinomio característico de la multiplicación por $\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z))W^n$, i.e., el término independiente de $\psi_{\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z))W^n}(V)$ (para más detalle, véase la Sección III.2).

La norma de $\Delta^{(p^e-n)}(f_{p^e}(z))W^n$ es un elemento del álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$, digamos

$$G(a_1,\dots,a_{p^e})W^t \in \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}.$$

Además, en este caso, se observa que $t = np^e$.

Por otro lado, se cumple además que

1. el elemento del álgebra de eliminación es de la forma

$$G(a_1,\dots,a_{p^e}) = a_n^{p^e} + \widetilde{G}(a_1,\dots,a_{p^e})$$

para cierto polinomio $\widetilde{G}(a_1,\dots,a_{p^e})$,

2. y $\widetilde{G}(a_1,\dots,a_{p^e}) \in \langle a_1,\dots,a_{n-1}\rangle$.

Para comprobar esta última afirmación, supongamos que

$$a_1 = 0,\dots,a_{n-1} = 0.$$

Entonces, la norma de $\overline{\Delta^{p^e-n}(f_{p^e}(z))}W^n = \overline{a}_n W^n$ es igual a $\overline{a}_n^{p^e} W^{np^e}$ (donde las barras denotan la restricción a $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$). Por tanto, se deduce que $\widetilde{G} \in \langle a_1,\dots,a_{n-1}\rangle$.

Recordemos además que cualquier elemento de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ es un polinomio homogéneo ponderado en los coeficientes $a_1,\dots,a_{p^e}$, donde cada a_j tiene asignado peso j. Por tanto, en particular, $\widetilde{G}$ es un polinomio homogéneo ponderado de grado np^e. Más aún, podemos expresar $\widetilde{G}$ como

$$\widetilde{G} = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{p^e}} \lambda_\alpha a_1^{\alpha_1}\dots a_{p^e}^{\alpha_{p^e}}$$

donde λ_α es un coeficiente y

$$\sum_{j=1}^{p^e} j\alpha_j = np^e$$

y para algún índice $j < n$ se cumple que $\alpha_j \neq 0$.

Queremos estudiar ahora la factorización de este elemento G de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ en función de y, para ello, veamos cómo es la factorización de cada uno de los sumandos de $\widetilde{G}$.

A partir de la factorización de los a_j, es sencillo ver que un sumando cualquiera de G se le puede factorizar una cantidad y^α, donde este exponente α es de la forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p^e} \alpha_j r_j. \tag{VI.13}$$

Afirmamos que, $\alpha > p^e r_n$. Esta afirmación que probaremos a continuación, es relevante, ya que asumiéndola como cierta tendremos que:

$$G(a_1,\ldots,a_{p^e}) = y^{r_n p^e} a'_n + y^{\alpha}\widetilde{G}' = y^{r_n p^e} G'$$

donde G' no es divisible por y.

Veamos que se cumple $\alpha > p^e r_n$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p^e} \alpha_i r_i = \sum_{i<n} \alpha_i r_i + \alpha_n r_n + \sum_{i>n} \alpha_i r_i \overset{(*)}{>}$$

$$> \sum_{i<n} \alpha_i \, i\frac{r_n}{n} + \alpha_n \, n\frac{r_n}{n} + \sum_{i>n} \alpha_i \, i\frac{r_n}{n} = \Big(\sum_{i=1}^{p^e} \alpha_i \, i\Big)\frac{r_n}{n} = p^e r_n,$$

donde $(*)$ se obtiene aplicando las condiciones impuestas en (VI.12).

Por tanto, queda así demostrado que existe un elemento GW^{np^e} del álgebra de eliminación tal que $GW^{np^e} = y^{r_n p^e} G'$ y en particular,

$$\mathrm{ord}_{\xi_H}(G) = \frac{r_n}{n}.$$

Por tanto, se deduce que

$$\mathrm{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) \leq \mathrm{ord}_{\xi_H}(G) = \frac{r_n}{n},$$

quedando así probado el Teorema. ↺

Corolario 2.5. *Fijada una sección z, se cumple que*

$$Sl_H(\mathcal{G},z) = \text{mín}\Big\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e}, \mathrm{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})\Big\} = \text{mín}\Big\{\frac{r_{p^e}}{p^e}, \mathrm{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})\Big\}.$$

Este Corolario afirma, en particular, que la pendiente de un álgebra involucra tan sólo a dos elementos: el álgebra de eliminación y el coeficiente independiente a_{p^e} del polinomio f_{p^e}.

Proposición 2.6. *Sea z una sección transversal tal que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal (véase Definición* VI.1.27*). Entonces, $Sl_H(\mathcal{G},z)$ no aumenta después de un cambio de variables de la forma $z' = z - \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$, i.e.,*

$$Sl_H(\mathcal{G},z) \geq Sl_H(\mathcal{G},z').$$

Demostración. Se deduce de la Proposición VI.1.28 y de la cota impuesta por $\mathrm{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$. ↺

Definición 2.7. Sea s un entero múltiplo de $p^e!$ y tal que si $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} = \bigoplus \widetilde{I}_n W^n$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[\widetilde{I}_s W^s]$. Fijada una sección transversal z tal que f_{p^e} está escrito en forma normal, diremos que el entero

$$h_{\beta,z} := Sl_H(\mathcal{G}, z) \cdot s$$

es el *exponente virtual* relativo a H.

Observación 2.8. El entero s descrito en la definición anterior no es único, pero supondremos fijado un entero que cumpla las condiciones previamente fijadas a lo largo de todo el capítulo.

Observación 2.9. Denominar al valor $h_{\beta,z} := Sl_H(\mathcal{G}, z) \cdot s$ como exponente virtual se debe a que si suponemos las hipótesis de la Definición VI.2.7, entonces la inclusión

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot y^{h_{\beta,z}} W^s$$

es óptima.

La optimicidad de esta inclusión es tal que dado cualquier otro entero m tal que $\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot y^m W^s$, se tiene que $h_{\beta,z} \geq m$.

2.10. La Proposición VI.2.6 muestra que fijada una proyección β y una sección transversal z, tras aplicar el algoritmo de limpieza (véase VI.1.24) y llegar a un parámetro transversal z_1 tal que $f_{p^e}(z_1)$ está escrito en forma normal relativa a $H = \{y = 0\}$, entonces tenemos una pendiente óptima.

La pregunta natural que surge a continuación es la dependencia o independencia de este valor óptimo respecto de la proyección elegida o del parámetro transversal de partida z. Dicho de otra forma, nos preguntamos si los exponentes virtuales que acabamos de definir están bien definidos o dependen de las múltiples elecciones hechas. Veremos en la siguiente Sección la independencia de estos exponentes.

3. Buena definición del exponente virtual

3.1. En esta Sección mostraremos la globalidad y la independencia respecto de la proyección fijada y del parámetro transversal z elegido, de los exponente virtual, $h_{\beta,z}$.

Vamos a comenzar enunciando una serie de resultados que describan un poco mejor la naturaleza de los exponentes $h_{\beta,z}$ que hemos descrito de forma local en la Sección VI.1.

Será de especial importancia el buen comportamiento que tienen con la adjunción de raíces N-ésimas (para N coprimo con p), por lo que previamente a esto introduciremos una serie de resultados en los que veremos el buen comportamiento de las pendientes de hipersuperficies y el orden del álgebra de eliminación con la adjunción de raíces N-ésimas.

Antes de empezar, fijemos un poco de notación. Consideremos una proyección genérica β y la presentación local dada por

$$\mathcal{G}, \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f_{p^e})W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}.$$

Sea z un parámetro transversal para el cual

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}.$$

Denotemos por $H = \{y = 0\}$ una hipersupeficie excepcional y recordemos la factorización de los coeficientes a_j en función del excepcional:

$$\begin{aligned}
&a_1 W^1 = y_1^{r_1} \cdot a_1' W^1,\\
&a_2 W^2 = y_1^{r_2} \cdot a_2' W^2,\\
&\ \vdots\\
&a_{p^e} W^{p^e} = y_1^{r_{p^e}} \cdot a_{p^e}' W^{p^e},
\end{aligned}$$

donde los a_j' no son divisibles por y para todo $j = 1, \ldots, p^e$.

Por otro lado vamos a considerar el esquema obtenido al añadir raíces N-ésimas en la variable y, es decir, el esquema obtenido tras el cambio

$$y \mapsto y^N$$

(nótese que por comodidad de notación, usaremos la misma variable y tras el cambio de base étale definido por $\mathcal{O}_{V^{(d)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle T^N - y\rangle$).

Tras este cambio, denotemos por $\widehat{f}_{p^e}^N$ el polinomio mónico de grado p^e obtenido a partir de f_{p^e}.

Lema 3.2. *Con la notación anterior, supongamos además que $f_{p^e}(z)$ está en forma normal respecto a $y = 0$. Entonces,*

1. *Supongamos que $\langle z, y\rangle$ es un centro permisible. Denotemos por $f_{p^e}^{(1)}(z_1)$ el transformado estricto de $f_{p^e}(z)$ en U_y, donde z_1 denota el transformado estricto de z, i.e. $z_1 = \frac{z}{y}$. Entonces,*

   (i) *$f_{p^e}^{(1)}(z_1)$ está escrito en forma normal respecto del nuevo excepcional $H_1 = \{y = 0\}$.*

   (ii) *Además,*

   $$Sl_{H_1}(f_{p^e}^{(1)}, z_1) = Sl_H(f_{p^e}, z),$$

   y por tanto,

   $$h_{\beta_1, z_1} = h_{\beta, z} - s.$$

2. *Consideramos la adjunción de raíces N-ésimas en y (con N coprimo con p), es decir, consideramos el cambio de base dado por $y \mapsto y^N$. Entonces,*

   (i) *El polinomio $\widehat{f}^N_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal respecto del excepcional $\widehat{H}^N = \{y = 0\}$.*

   (ii) *Además,*
$$Sl_{\widehat{H}^N}(\widehat{f}^N_{p^e}, z) = N \cdot Sl_H(f_{p^e}, z),$$
   y por tanto
$$\widehat{h}^N_{\beta,z} = h_{\beta,z} \cdot N.$$

Demostración. Sea $V^{(d)} \longleftarrow V_1^{(d)}$ la transformación monoidal a lo largo del centro permisible dado por $\langle z, y\rangle$. Consideraremos la carta U_y (en la que dividimos por y) para toda la argumentación. Nótese que basta con considerar únicamente esta carta, ya que $\mathrm{Sing}(f^{(1)}_{p^e}, p^e) \subset U_y$.

El transformado estricto de
$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$$
en esta carta U_y está dado por
$$\begin{aligned} f^{(1)}_{p^e}(z_1) &= z_1^{p^e} + a_1^{(1)} z^{p^e-1} + \cdots + a^{(1)}_{p^e} = \\ &= z_1^{p^e} + a_1 y^{-1} z_1^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e} y^{-p^e}, \end{aligned}$$
donde por z_1 denotamos el transformado estricto de z, i.e. $z_1 = \frac{z}{y_1}$.

Afirmamos que este polinomio $f^{(1)}_{p^e}(z_1)$ está escrito en forma normal respecto del nuevo excepcional definido de forma local por $y = 0$. Para verlo, consideremos la factorización de los nuevos coeficientes $a^{(1)}_j$ para $j = 1, \ldots, p^e$,
$$\begin{aligned} &a_1^{(1)} W^1 = y^{\widetilde{r}_1} \cdot b'_1 W^1 = y^{r_1 - 1} \cdot b'_1 W^1, \\ &a_2^{(1)} W^2 = y^{\widetilde{r}_2} \cdot b'_2 W^2 = y^{r_2 - 2} \cdot b_2 W^2, \\ &\vdots \\ &a^{(1)}_{p^e} W^{p^e} = y^{\widetilde{r}_{p^e}} \cdot b'_{p^e} W^{p^e} = y^{r_{p^e} - p^e} \cdot b_{p^e} W^{p^e}, \end{aligned}$$
donde los b'_j no son divisibles por y para $j = 1, \ldots, p^e$.

Por tanto, se observa que
$$\frac{\widetilde{r}_j}{j} = \frac{r_j}{j} - 1,$$

para todo $j = 1, \dots, p^e$ y así, la pendiente relativa a H_1 de $f_{p^e}^{(1)}(z_1)$ se puede relacionar con la de $f_{p^e}(z)$ relativa a H:

$$Sl_{H_1}(f_{p^e}^{(1)}, z_1) = Sl_H(f_{p^e}, z) - 1. \tag{VI.14}$$

Es por tanto inmediato observar que si $f_{p^e}(z)$ estaba en forma normal de tipo (A) (el mínimo se alcanza en un coeficiente intermedio), entonces esta condición se preserva por esta transformación, es decir, el mínimo se alcanzará en el mismo coeficiente intermedio. Por tanto, $f_{p^e}^{(1)}(z_1)$ está escrito en forma normal de tipo (A).

De la misma forma podemos argumentar si $f_{p^e}(z)$ está en forma normal de tipo (B1) (el mínimo se alcanza únicamente en el término independiente y $\frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Ya que si $\frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces $\frac{r_{p^e}}{p^e} - 1 \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$. La forma normal de tipo (B1) se preserva.

Nos resta por estudiar el caso en el que $f_{p^e}(z)$ esté escrito en forma normal de tipo (B2). En este caso $\frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{>0}$ y

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}}(g_0 + g_1 y + \dots),$$

con $g_\ell \in k'[[x_2, \dots, x_{d-1}]]$ (para $\ell = 0, \dots$) y g_0 no es una potencia p^e. Entonces $(\frac{r_{p^e}}{p^e} - 1) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Además, como el transformado de a_{p^e} es

$$a_{p^e}^{(1)} = y^{r_p^e - p^e}(g_0 + g_1 y + \dots),$$

y $g_0 \in k'[[x_2, \dots, x_{d-1}]]$, entonces podemos suponer que el término g_0 que aparecía en a_{p^e} es el que aparece en esta expresión. Por tanto, no es necesario realizar un proceso de limpieza de potencias p^e en $f'_{p^e}(z_1)$. La forma normal de tipo (B2) se preserva.

Ahora, a partir de (VI.14) se deduce que

$$h_{\beta_1, z_1} = h_{\beta, z} - s.$$

Veamos ahora el apartado 2. del Lema. Consideremos localmente el esquema resultante de la adjunción de raíces N-ésimas de y para N coprimo con p.

Después de adjuntar las raíces N-ésimas, el polinomio obtenido a partir de

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e - 1} + \dots + a_{p^e}$$

está dado por

$$\widehat{f}_{p^e}(z) = z^{p^e} + \widehat{a}_1 z^{p^e - 1} + \dots + \widehat{a}_{p^e},$$

y donde cada nuevo coeficiente $\widehat{a}_j$ es de la forma

$$\begin{aligned}
&\widehat{a}_1 W^1 = y^{\widehat{r}_1} \cdot \widehat{a}'_1 W^1 = y^{N\cdot r_1} \cdot \widehat{a}'_1 W^1 \\
&\widehat{a}_2 W^2 = y^{\widehat{r}_2} \cdot \widehat{a}'_2 W^2 = y^{N\cdot r_2} \cdot \widehat{a}'_2 W^2 \\
&\vdots \\
&\widehat{a}_{p^e} W^{p^e} = y^{\widehat{r}_{p^e}} \cdot \widehat{a}'_{p^e} W^{p^e} = y^{N\cdot r_{p^e}} \cdot \widehat{a}'_{p^e} W^{p^e},
\end{aligned}$$

donde los $\widehat{a}'_1 W^1$ no son múltiplos de y para $j = 1, \dots, p^e$.

Como previamente, afirmamos que la forma normal se preserva tras la adjunción de raíces N-ésimas. En este caso,

$$\frac{\widehat{r}_j}{j} = N \cdot \frac{r_j}{j},$$

para $j = 1, \dots, p^e$. Por tanto la pendiente de $\widehat{f}^N_{p^e}(z)$ relativa a $\widehat{H}^N$ se puede expresar en términos de la pendiente de f_{p^e} relativa a H:

$$Sl_{\widehat{H}^N}(\widehat{f}^N_{p^e}, z) = N \cdot Sl_H(f_{p^e}, z). \tag{VI.15}$$

Argumentando como previamente, es inmediato observar que si $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal de tipo (A), entonces también lo está $\widehat{f}^N_{p^e}$. Por tanto, la forma normal de tipo (A) o (B1) se preserva.

Supongamos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal de tipo (B1) (el mínimo se alcanza únicamente en el término independiente y $\frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$). Como $\frac{\widehat{r}_j}{j} = N\frac{r_j}{j}$ para todo $j = 1, \dots p^e$, el mínimo lo proporciona $\frac{\widehat{r}_{p^e}}{p^e}$. Por otro lado, $\frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$ y como como N es coprimo con p^e, se deduce que $\frac{\widehat{r}_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$. La forma normal tipo (B1) se preserva.

Por último, supongamos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal de tipo (B2), es decir, el mínimo se alcanza únicamente en el término independiente y $\frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{>0}$, entonces $N\frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Por otr lado,

$$\widehat{a}_{p^e} = y^{r_{p^e}N}(\widehat{g}_0 + \widehat{g}_1 y + \dots),$$

donde los $g_\ell \in k'[[x_2, \dots, x_{d-1}]]$. Se observa que $\widehat{g}_0 = g_0$ donde g_0 es el que aparecía en a_{p^e}, ya que $g_0 \in k'[[x_2, \dots, x_{d-1}]]$ y por tanto la adjunción de raíces N-ésimas en y lo deja invariante. Se concluye que la forma normal de tipo (B2) se preserva.

Así, de (VI.15) se deduce que

$$\widehat{h}^N_{\beta,z} = h_{\beta,z} \cdot N.$$

$\circlearrowleft$

Lema 3.3. *Sea* $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} = \bigoplus \widetilde{I}_n W^n$ *el álgebra de eliminación descrita al inicio de la Sección y sea* H *una hipersuperficie excepcional (que podemos identificaremos con* $\beta(H)$*). Sea* s *un entero tal que* $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[\widetilde{I}_s W^s]$*. Supongamos que* $\widetilde{I}_s$ *se puede expresar como*

$$\widetilde{I}_s = I(H)^{\alpha} \cdot J'$$

para cierto entero $\alpha > 0$ *y* J' *un ideal que no es múltiplo de* $I(H)$*. Supongamos que localmente* $I(H)$ *está definido por* y*. Entonces,*

(a) *Si* $\langle z, y\rangle$ *es un centro permisible para* $\mathcal{G}$ *(y en particular* $\langle y\rangle$ *es permisible para* $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$*, i.e.* $\alpha \geq 1$*) y consideramos la transformación monoidal a lo largo de* $\langle z, y\rangle$ *(en* $V^{(d-1)}$ *transformamos a lo largo de* $\langle y\rangle$*). Entonces, el nuevo exponente del excepcional que aparece en el transformado de* $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$*, digamos* α_1*, cumple*

$$\alpha_1 = \alpha - 1.$$

(b) *Consideremos localmente el esquema obtenido tras adjuntar raíces* N*-ésimas de* y*, con* N *coprimo con* p*. Entonces, el nuevo exponente del excepcional, digamos* $\widehat{\alpha}_i^N$*, es tal que*

$$\widehat{\alpha}_i^N = N\alpha_i.$$

Demostración. La demostración es inmediata por el buen comportamiento de las álgebras de eliminación con las explosiones en codimensión 1 y por la compatibilidad con el cambio de base (y en particular con la adjunción de raíces N-ésimas). ◌

Proposición 3.4. *El exponente virtual* $h_{\beta,z}$ *tiene un buen comportamiento con la adjunción de raíces* N*-ésimas y con transformaciones a lo largo de centros de codimensión 2 dados por* $\langle z, y\rangle$ *(donde* $y = 0$ *denota localmente el excepcional* H*), es decir,*

(a) *Supongamos que* $\langle z, y\rangle$ *es un centro permisible. Entonces, después de la transformación a lo largo de* $\langle z, y\rangle$*, el nuevo exponente virtual, es tal que*

$$h_{\beta_1,z_1} = h_{\beta,z} - s.$$

(b) *Si adjuntamos raíces* N*-ésimas de* y*, para* N *coprimo con* p*, el nuevo exponente virtual,* $\widehat{h}_{\beta,z}^N$*, es tal que*

$$\widehat{h}_{\beta,z}^N = N \cdot h_{\beta,z}.$$

Demostración. Supongamos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal. Entonces, los exponentes virtuales están definidos como

$$h_{\beta,z} = \text{mín}\{Sl_H(f_{p^e}, z), \text{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})\}.$$

Por tanto, la Proposición se deduce de forma inmediata de los Lemas VI.3.2 y VI.3.3. $\circlearrowleft$

Veamos por último un Lema que relacionará la permisibilidad de los centros de tipo $\langle z, y\rangle$ con los exponentes virtuales $h_{\beta,z}$.

Proposición 3.5. *La hipersuperficie excepcional $\beta(H)$ es una componente de $\beta(\text{Sing}(\mathcal{G}))$ (y por tanto, localmente, $\langle z, y\rangle$ es un centro permisible para $\mathcal{G}$), si y sólo si $h_{\beta,z} \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que $h_{\beta,z} \geq 1$, entonces es inmediato que $\langle z, y\rangle$ es un centro permisible, y la afirmación queda probada.

Supongamos ahora que $h < 1$. Veamos los casos en que esto puede suceder:

1. Si $h = \text{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) < 1$, entonces $\beta(H)$ no es una componente de $\text{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$.

   Por otro lado, $\beta(\text{Sing}(\mathcal{G})) \subset \text{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$. Por lo tanto, $\{y = 0\}$ no es una componente de $\beta(\text{Sing}(\mathcal{G}))$.

2. Supongamos ahora que $h_{\beta,z} = Sl_H(f_{p^e}, z) < 1$ (donde $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal) supongamos que $\text{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) > 1$. Entonces, existen tres posibilidades

   a) $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_j}{j}$ para algún índice $j < p^e$, pero entonces por el Teorema VI.2.4, tendríamos que $\text{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_\mathcal{G}, \beta) \leq \frac{r_j}{j}$, lo que contradice la hipótesis $\text{ord}_{\xi_H}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}) > 1$.

   b) Supongamos ahora que $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_j}{j}$ para todo índice $j = 1, \ldots, p^e - 1$ y que $1 \leq r_{p^e} \leq p^e - 1$. En este caso,

   $$\beta^{-1}(H) \cap \{f_{p^e} = 0\} = \{z = 0, y = 0\}.$$

   Consideremos el anillo local completo $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d)},\xi_H}$. En este anillo,

   $$f_{p^e} = z^{p^e} + y^{r_1} z^{p^e-1} u_1 + \cdots + y^{r_{p^e}} u_{p^e},$$

   donde $u_i \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)},\xi_H}$ es una unidad ($i = 1, \ldots, p^e$).
   Como $r_{p^e} < 1$, se deduce que

   $$V(\langle z, y\rangle) \not\subset \text{Sing}(f_{p^e}, p^e) \subset \text{Sing}(\mathcal{G}).$$

c) Finalmente, supongamos que $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} = 0$. Entonces,

$$V(\langle z, y\rangle) \not\subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$$

se deduce a partir de la afirmación de la Observación VI.3.6 y el hecho de que $0 \neq \overline{a}_{p^e} = a_{p^e}|_{y=0}$ no puede ser una potencia p^e (al estar $f_{p^e}(z)$ escrito en forma normal).

$\circlearrowleft$

Observación 3.6. Sea R un anillo local regular de dimensión 1. Consideremos el anillo

$$R[Z]/\langle z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\rangle$$

y la proyección dada por

$$\begin{array}{l}\mathrm{Spec}(R[Z]) \subset \mathrm{Spec}(R[Z]/\langle z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\rangle) = X \\ \quad\Big\downarrow \pi \\ \mathrm{Spec}(R)\end{array}$$

Sea $x_0 \in \mathrm{Spec}(R)$. Si $P \in X$ es un punto de multiplicidad n tal que $\pi(P) = x_0$, entonces P es el único punto de la fibra y es un punto racional, es decir,

$$k(P) = R/\mathfrak{M}_{x_0}.$$

Esta afirmación se sigue del Teorema de multiplicidad de Zariski (Teorema V.1.1).

Podemos ya enunciar y demostrar el Teorema central de esta Sección:

Teorema 3.7. *Los exponentes virtuales $h_{\beta,z}$ definidos de manera local son independientes de la proyección, del parámetro z elegido y globalizan.*

Demostración. Fijemos el álgebra de Rees $\mathcal{G}$ y supongamos que existen dos polinomios mónicos $f(z)$ y $g(z')$ de órdenes p^e y $p^{e'}$ respectivamente, que estén escritos en forma normal relativa a la hipersuperficie H y tales que

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f(z)W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f(z))W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \;\text{ y}$$

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[g(z')W^{p^{e'}}, \Delta^{\alpha}(g(z'))W^{p^{e'}-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta'},$$

para ciertas proyecciones genéricas β y β'.

Supongamos además que $f(z)$ y $g(z')$ son tales que para cada uno los exponente virtuales de $\mathcal{G}$ respecto de H son distintos, es decir,

$$h_{\beta,z} \neq h_{\beta',z'}$$

(podemos suponer que el entero s es común para los dos).

Dado que $h_{\beta,z} \neq h_{\beta',z'}$, entonces se cumple que las pendientes óptimas, digamos $\ell = Sl_H(\mathcal{G}, z) = \frac{h_{\beta,z}}{s}$ y $\ell' = Sl_H(\mathcal{G}, z') = \frac{h_{\beta',z'}}{s}$, son distintas. Supongamos que $\ell = \frac{n}{s}$ y $\ell' = \frac{n'}{s}$ (por tanto, $n \neq n'$).

Consideremos localmente ahora el esquema obtenido tras adjuntar raíces N-ésimas de y (con N coprimo con p y suficientemente grande). Entonces, por la Proposición VI.3.4 se deduce que:

$$\begin{aligned} \widehat{\ell}^N &= \tfrac{n}{s}N, \\ \widehat{\ell'}^N &= \tfrac{n'}{s}N. \end{aligned}$$

Consideremos ahora transformaciones monoidales en codimensión 2 (en $\langle z, y\rangle$ y transformados). Consideremos estas transformaciones tantas veces como podamos, digamos r (el número de explosiones en codimensión 2 es intrínseco e independiente de todas las elecciones hechas).

Entonces, por la Proposición VI.3.4, las nuevas pendientes bajan en 1 tras cada transformación. Por otro lado, por el Lema VI.3.5, se puede explotar siempre que las pendientes sean ≥ 1. Se deduce así que

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{s}N - r \geq 1, \\ \frac{n'}{s}N - r \geq 1 \end{array}\right\}$$

o equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{l} r \leq \frac{n}{s}N - 1, \\ r \leq \frac{n'}{s}N - 1. \end{array}\right.$$

De hecho, el entero r se define como el mayor entero para el que se cumplen estas desigualdades. Ahora bien, para N suficientemente grande, si

$$\frac{n}{s} \neq \frac{n'}{s},$$

entonces se cumple

$$\left[\frac{n}{s}N\right] \neq \left[\frac{n'}{s}N\right], \tag{VI.16}$$

donde por $[-]$ denotamos la parte entera del número racional.

Por tanto, (VI.16) implica en particular que el entero r tiene que tomar dos valores distintos, lo que nos lleva a contradicción, ya que r es un valor bien definido y fijo. $\circlearrowleft$

Observación 3.8.

1. El Teorema VI.3.7 nos indica que los exponentes virtuales, $h_{\beta,z}$, que hemos calculado en la Sección VI.1 de forma local en un punto, globaliza, es decir, es el mismo exponente para cualquier punto de la hipersuperficie excepcional H.

2. Los exponentes virtuales son independientes de toda elección hecha, por tanto, denotaremos a los exponentes virtuales asociados a una hipersuperficie excepcional H_i por h_{H_i} o simplemente h_i.

3. La inclusión
$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W^1 \odot y^h W^s$$
es óptima, en el sentido de que dado cualquier otra sección z' y exponente a tal que
$$\mathcal{G} \subset \langle z' \rangle W^1 \odot y^a W^s,$$
se tiene que $a \leq h$.

4. Canonicidad de las secciones transversales

4.1. Biyección entre secciones e ideales $< z - a >$ para $a \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$

Definición 4.2. Fijamos un morfismo $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ y un punto cerrado $x \in V^{(d)}$. Una *sección a través de x* es un morfismo $s : V^{(d-1)} \longrightarrow V^{(d)}$.

Observación 4.3. Podemos pensar una sección a través de x como un subesquema liso transversal al morfismo β que pasa por el punto x. Dada esta identificación de las secciones con los subesquemas lisos que pasan po x, fijada una sección s podemos identificarla con el ideal $< z >$ de $\mathcal{O}_{V^{(d)}}$.

Proposición 4.4. *Sea $x \in V^{(d)}$ un punto liso, fijamos un morfismo liso $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$. Sea $\{x_1, \dots, x_{d-1}\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$, y sea $\{x_1, \dots, x_{d-1}, z\}$ una extensión a un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$.*

Podemos indentificar el ideal $< z >$ con una sección del morfismo β. Entonces, existe una correspondencia biyectiva entre las secciones del morfismo que pasan por x y los ideales de la forma $< z - a >$, donde $a \in \mathfrak{M}_{\beta(x)}$, el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}$.

Demostración. Consideramos la sección $s : V^{(d-1)} \longrightarrow V^{(d)}$ que se identifica con el ideal $< Z >$. Sea s' otra sección. Como en otras ocasiones, podemos aplicar el Teorema de Preparación de Weierstrass en un entorno étale de x, obteniendo así que s' es un polinomio mónico de grado 1 con término independiente un coeficiente $\alpha \in \mathfrak{M}_{\mathcal{O}_{V^{(d-1)},\beta(x)}}$, donde α es una función de $V^{(d-1)}$ en un entorno étale de $\beta(x)$.

Entonces, s' queda unívocamente determinado por la expresión $z + \alpha$, es decir, podemos identificar cada sección s' con un ideal $< z + \alpha >$.

$\circlearrowleft$

4.5. Canonicidad de las secciones transversales.

En el Teorema VI.3.7 demostramos que los exponentes virtuales asociados a un álgebra $\mathcal{G}$ y a una hipersuperficie excepcional H están bien definidos y son independientes de la proyección β y del parámetro z elegidos.

Ahora bien, si consideramos la inclusión dada por

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W^1 \odot y^h W^s$$

surge una pregunta natural, ¿qué relación existe entre los parámetros transversales para los que se cumple esta inclusión?

Antes de responder a esta pregunta, empecemos dando unas definiciones previas.

Definición 4.6. Sea V un esquema liso y $E = \{H_1, \ldots, H_r\}$ un conjunto de hipersuperficies lisas con cruzamientos normales. Un *ideal monomial soportado* en E es un haz de ideales de la forma

$$\mathcal{M} = I(H_1)^{\alpha_1} \cdot I(H_2)^{\alpha_2} \cdots I(H_r)^{\alpha_r},$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Diremos que un álgebra de Rees es un *álgebra monomial* si es de la forma $\mathcal{O}_V[\mathcal{M}W^s]$ para algún ideal monomial $\mathcal{M}$ y algún entero positivo s.

Notación 4.7. Por comodidad en la notación, cuando hagamos referencia al álgebra monomial definida por $\mathcal{O}_V[\mathcal{M}W^s]$, si el anillo en el que estamos trabajando se puede sobreentender, escribiremos simplemente $\mathcal{M}W^s$.

Como consecuencia del Teorema VI.3.7 es natural dar la siguiente definición:

Definición 4.8. Fijada un álgebra $\mathcal{G}$ y una hipersuperficie excepcional H, definiremos como el *álgebra monomial virtual* al álgebra monomial definida como

$$\mathcal{M}W^s \sim I(H)^h W^s,$$

donde h denota el exponente virtual definido a lo largo del Capítulo.

Definición 4.9. Fijemos un álgebra $\mathcal{G}$ y una hipersuperficie H y el álgebra monomial virtual $\mathcal{M}W^s$. Fijada un proyección β, diremos que un parámetro transversal z está $\mathcal{M}W^s$-*adaptado* si

$$\mathcal{G} \subset \langle z\rangle W^1 \odot \mathcal{M}W^s.$$

En el siguiente Teorema, veremos que estos parámetros transversales $\mathcal{M}W^s$- adaptados están estrechamente ligados entre sí.

Teorema 4.10. (Canonicidad de las secciones transversales) *Fijada un álgebra de Rees $\mathcal{G}$ y una hipersuperficie excepcional H, podemos considerar el monomio virtual $\mathcal{M}W^s$. Sea z un parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado. Entonces, la inclusión*

$$\mathcal{G} \subset \langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s$$

es canónica, es decir, fijado z' otro parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado se cumple que

$$\langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s = \langle z'\rangle W \odot \mathcal{M}W^s.$$

Demostración. Dadas dos secciones transversales $z, z' \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$, por la Proposición VI.4.4 podemos pasar de una a otra mediante un cambio de variable de la forma $z' = uz + \alpha$ donde u es una unidad en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ y $\alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$.

En el siguiente Lema, daremos un argumento para reducir el problema a considerar parámetros transversales $\mathcal{M}W^s$-adaptados, z y z' tales que $f_{p^e}(z)$ y $f_{p^e}(z')$ estén escritos en forma normal.

Lema 4.11. *Sea z un parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado, es decir, tal que $\mathcal{G} \subset \langle z\rangle W^1 \odot \mathcal{M}W^s$. Fijemos una presentación local*

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e})W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}.$$

Si $f_{p^e}(z)$ no está escrito en forma normal, entonces los cambios $z'' = z + \alpha$ dados por el algoritmo de limpieza (véase VI.1.24) son compatibles con $\mathcal{M}W^s$, es decir, son de la forma

$$z'' = z + \alpha \quad con\ \alpha W^1 \in \mathcal{M}W^s,$$

o equivalentemente,

$$\langle z\rangle \odot \mathcal{M}W^s = \langle z''\rangle \odot \mathcal{M}W^s.$$

Demostración. Supongamos que localmente $H = \{y = 0\}$, que z es un parámetro $\mathcal{M}W^s$-adaptado y que el polinomio $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$ no está escrito en forma normal. Entonces, se cumple que

$$a_j W^j \in \mathcal{M}W^s$$

para todo $j = 1, \dots, p^e$ y que

$$Sl_H(\mathcal{G}, z) \leq Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_j}{j} \quad \text{para } j = 1, \dots, p^e - 1 \ \text{ y } \ \frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

donde además

$$a_{p^e} = y^{r_{p^e}}(g_0 + g_1 y + \dots)$$

con g_ℓ no divisible por y ($\ell = 0, \dots$) y además g_0 es una potencia p^e.

El cambio de variable realizado por el algoritmo de limpieza es de la forma $z'' = z + y^{r_{p^e}}\alpha'$ donde $\alpha' \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ es tal que $\alpha'|_{y=0} = g_0|_{y=0}$. Nótese que como

$$Sl_H(\mathcal{G}, z) \leq Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e},$$

entonces $\alpha = y^{r_{p^e}}\alpha'$ cumple que $\alpha W^1 \in \mathcal{M}W^s$. $\circlearrowleft$

Supongamos ahora que z es un parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado, tal que $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e}$ está escrito en forma normal (véase VI.1.27). Entonces, un cambio de la forma $z'' = uz$ con u una unidad en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ preserva la forma normal, ya que:

$$\begin{aligned}(u^{-1})^{p^e} f_{p^e}(z'') &= z^{p^e} + u^{-1}a_1 z^{p^e-1} + \dots + (u^{-1})^{p^e} a_{p^e} \\ &= z^{p^e} + \widetilde{a}_1 z^{p^e-1} + \dots + \widetilde{a}_{p^e}\end{aligned}$$

donde los coeficientes son los mismos que antes salvo el producto por una unidad, lo que no afecta en cuestiones valorativas relativas al excepcional.

Podemos por tanto considerar únicamente cambios de la forma $z' = z+\alpha$. Por el Lema VI.4.11, basta entonces probar que si tenemos dos secciones z y z' con $z' = z + \alpha$ tales que $f_{p^e}(z)$ y $f_{p^e}(z')$ están escritos en forma normal, entonces

$$(z - z')W^1 \in \mathcal{M}W^s.$$

Supongamos que

$$\begin{aligned}f_{p^e}(z) &= z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e}, \\ f_{p^e}(z') &= (z')^{p^e} + b_1 (z')^{p^e-1} + \dots + b_{p^e}\end{aligned}$$

están escritos en forma normal, que $z' = z + \alpha$ y que $\alpha W^1 \notin \mathcal{M}W^s$. Como $\alpha W \notin \mathcal{M}W^s$, entonces α es de la forma

$$\alpha = y^{s_\alpha}\alpha',$$

donde $s_\alpha < \frac{h}{s}$ y α' no divisible por y, por h denotamos el exponente virtual relativo a $y = 0$.

Consideremos ahora la factorización habitual de los coeficientes de $f_{p^e}(z)$,

$$\begin{aligned} a_1 W^1 &= y_1^{r_1} \cdot a_1' W^1, \\ a_2 W^2 &= y_1^{r_2} \cdot a_2' W^2, \\ &\vdots \\ a_{p^e} W^{p^e} &= y_1^{r_{p^e}} \cdot a_{p^e}' W^{p^e}, \end{aligned}$$

como por construcción $\frac{r_j}{j} \geq \frac{h}{s}$ para todo $j = 1, \ldots, p^e$, entonces tenemos la condición en s_α dada por

$$s_\alpha < \frac{r_j}{j} \text{ para } j = 1, \ldots, p^e. \qquad \text{(VI.17)}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} f_{p^e}(z') &= (z')^{p^e} + b_1 (z')^{p^e-1} + \cdots + b_{p^e} \\ &= f_{p^e}(z+\alpha) = z^{p^e} + \Delta^{(p^e-1)}(f_{p^e})(\alpha) z^{p^e-1} + \cdots + f_{p^e}(\alpha), \end{aligned}$$

es decir, para $n = 1, \ldots, p^e - 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \Delta^{(p^e-n+1)}(\alpha) = c_{1,n}\alpha^{n-1} a_1 + \cdots + c_{n-1,n}\alpha a_{n-1} + a_n \\ &= y_1^{(n-1)s_\alpha + r_1} c_{1,n}(\alpha') a_1' \cdots + y_1^{s_\alpha + r_{n-1}} c_{n-1,n}\alpha' a_{n-1}' + y_1^{r_n} a_n', \end{aligned}$$

con $c_{j,n} = \binom{p^e-j}{n-j}$ para $j < n$. Podemos así considerar la factorización de los coeficientes b_n, respecto de y:

$$b_n = y_1^{\widetilde{r}_n} b_n',$$

donde se cumple que

$$\widetilde{r}_n \geq \min_{1 \leq j \leq n} \{(n-j)s_\alpha + r_j\}.$$

Lema 4.12. *Con la notación anterior, se cumple la siguiente desigualdad*

$$(n-j)s_\alpha + r_j > n s_\alpha \qquad \text{(VI.18)}$$

para $j = 1, \ldots, n$ *y* $n < p^e$.

Demostración. Supongamos que no es cierto, es decir, $(n-j)s_\alpha + r_j \leq n s_\alpha$, entonces

$$(n-j)s_\alpha + r_j \leq n s_\alpha \iff r_j \leq j s_\alpha \iff s_\alpha \geq \frac{r_j}{j},$$

lo que contradice (VI.17). $\circlearrowleft$

De este Lema podemos deducir de manera automática que

$$\widetilde{r}_n > ns_\alpha \quad \text{para } 1 \leq n \leq p^e - 1.$$

Consideremos ahora el término independiente y su factorización en función de y, es decir,

$$b_{p^e} = y_1^{\widetilde{r}_{p^e}} b'_{p^e}.$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} b_{p^e} &= \alpha^{p^e} + a_1 \alpha^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e} \\ &= y_1^{p^e s_\alpha} (\alpha')^{p^e} + y_1^{(p^e-1)s_\alpha + r_1} (\alpha')^{p^e-1} a'_1 + \cdots + y_1^{r_{p^e}} a'_{p^e}. \end{aligned}$$

Lema 4.13. *Con la notación anterios, se cumple que*

$$p^e s_\alpha < (p^e - j)s_\alpha + r_j, \tag{VI.19}$$

para $j = 1, \ldots, p^e$.

Demostración. Supongamos que no es cierto,entonces $p^e s_\alpha \geq (p^e - j)s_\alpha + r_j$, y

$$p^e s_\alpha \geq (p^e - j)s_\alpha + r_j \iff js_\alpha \geq r_j \iff s_\alpha \geq \frac{r_j}{j}$$

lo que contradice (VI.17). ⟲

Se deduce por tanto que

$$\widetilde{r}_{p^e} = p^e s_\alpha.$$

Por definición la pendiente de $f_{p^e}(z')$ relativa a $y = 0$ se define como

$$Sl_H(f_{p^e}, z') = \min_{1 \leq j \leq p^e} \left\{ \frac{\widetilde{r}_j}{j} \right\}.$$

A partir de (VI.18) y (VI.19) tenemos que

$$\frac{\widetilde{r}_{p^e}}{p^e} = s_\alpha < \frac{\widetilde{r}_n}{n}.$$

Entonces, dicha pendiente es

$$Sl_H(f_{p^e}, z') = s_\alpha < \frac{h}{s},$$

donde h denota el exponente virtual relativo a y. La canonicidad del monomio virtual (Teorema VI.3.7) y el hecho de que $f_{p^e}(z')$ está en forma normal contradicen esta última desigualdad, quedando así demostrado el Teorema. ⟲

5. El monomio virtual para varias hipersuperficies excepcionales

5.1. En el contexto de resolución de singularidades, partimos de un álgebra diferencial simple $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_{V^{(d)}}[W]$ que además podemos suponer que es integralmente cerrada. Junto a esta álgebra $\mathcal{G}$ consideramos una proyección transversal $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$. En esta situación podemos suponer que existe una presentación local (véase el Teorema IV.3.2) de la forma

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e})W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta},$$

donde:

(i) $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ denota el álgebra de eliminación en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, y aquí la identificamos con su pull-back en $\mathcal{O}_{V^{(d)}}[W]$.

(ii) f_{p^e} es analíticamente irreducible de orden p^e en cada punto cerrado $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$.

Recordemos ahora que una sucesión de transformaciones permisibles de $\mathcal{G}$ (véase (II.3)),

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array} \tag{VI.20}$$

induce una sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \\ \downarrow{\beta} & & \downarrow{\beta_1} & & & & \downarrow{\beta_r} \\ V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi'_1} & V_1^{(d-1)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi'_r} & V_r^{(d-1)} \end{array} \tag{VI.21}$$

donde:

(i) Cada morfismo vertical $\beta_i : V_i^{(d)} \longrightarrow V_i^{(d-1)}$ es una proyección genérica (es decir, transversal a $\mathcal{G}_i$), localmente en un punto, que domina en el entorno local escogido.

(ii) La sucesión inferior induce una sucesión de transformaciones del álgebra de eliminación $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$,

$$\begin{array}{ccccccc} V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi'_1} & V_1^{(d-1)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi'_r} & V_r^{(d-1)} \\ \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 & & & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \end{array}$$

y más aún, cada $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i$ es el álgebra de eliminación del álgebra $\mathcal{G}_i$ relativa al morfismo $V_i^{(d)} \xrightarrow{\beta_i} V_i^{(d-1)}$, es decir, $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_i,\beta_i}$.

En particular, para cada índice i,

$$\mathcal{G}_i \sim \mathcal{O}_{V_i^{(d)}}[f_{p^e}^{(i)}W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}^{(i)})W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i,$$

donde $\sim$ denota que las dos álgebras tienen la misma clausura entera y $f_{p^e}^{(i)}$ es el transformado estricto de f_{p^e}.

Teorema 5.2. (Bravo-Villamayor, [12]).

Existe una forma canónica de definir sucesiones como las dadas en (VI.20) *y* (VI.21) *de tal forma que el álgebra de eliminación* $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r$ *es vacía o es un álgebra monomial soportada en el lugar excepcional.*

De hecho, la sucesión de transformaciones y el álgebra monomial $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r$ *son independientes de la proyección elegida* β.

En adelante, consideraremos:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_r \\
V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \\
\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_r} \\
V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi_1'} & V_1^{(d-1)} & \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi_r'} & V_r^{(d-1)} \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r
\end{array} \qquad \text{(VI.22)}$$

como en la formulación del teorema anterior ([12]). De hecho, supondremos que $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \subset \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}[W]$ es un álgebra monomial soportada en el lugar excepcional. Lo mismo sucede con su pull-back a $V_r^{(d)}$.

Podemos identificar $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r$ con su pull-back, entonces el álgebra de eliminación se puede escribir como

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r} W^s = \mathcal{N}W^s.$$

Y por tanto, la presentación local de $\mathcal{G}_r$ es de la forma

$$\mathcal{G}_r \sim \mathcal{O}_{V_r^{(d)}}[f_{p^e}^{(r)}W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f_{p^e}^{(r)})W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot \mathcal{N}W^s.$$

Suponiendo este contexto, es natural preguntarse si podemos extender la construcción del monomio virtual que hemos realizado para una hipersuperficie excepcional en el caso en el que consideremos varias hipersuperficies excepcionales.

Afirmamos que existe una forma canónica de construir un álgebra monomial virtual, $\mathcal{M}W^s$ como la descrita en la Definición VI.4.8, pero para varias hipersuperficies excepcionales. Afirmamos también, que existirá un parámetro transversal $z \in \mathcal{O}_{V(d)}$ tal que

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W^1 \odot \mathcal{M}W^s,$$

donde $\mathcal{M}W^s$ será el álgebra monomial virtual soportada en el lugar excepcional. Esta inclusión será optima en cierto sentido que se detallará más adelante.

Para mostrar esta afirmación, tendremos que ver que existe una cierta compatibilidad entre las transformaciones permisibles y el álgebra monomial virtual.

5.1. Forma normal simultánea para varias hipersuperficies

5.3. Como ya hemos hecho a lo largo del Capítulo, empezaremos considerando nuestro problema para el caso de una hipersuperficie definida por un polinomio mónico de grado p^e.

Consideremos un polinomio mónico de grado p^e definido por

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$$

y consideremos una colección de hipersuperficies excepcionales con cruzamientos normales, es decir,

$$E = \{H_1, \ldots, H_r\}.$$

donde cada hipersuperficie está definida de forma local por $H_i = \{y_i = 0\}$ para $i = 1, \ldots, r$.

Proposición 5.4. (Forma normal simultánea). *Supongamos la situación descrita previamente. Existe un parámetro transversal z tal que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal simultáneamente para todas las hipersuperficies excepcional.*

Demostración. Veamos la demostración del caso de dos hipersuperficies excepcionales H_1 y H_2. Sea f_{p^e} un polinomio mónico de grado p^e. Denotemos por y_1 e y_2 las coordenadas locales de las hipersuperficies excepcionales H_1 y H_2. Sea z un parámetro transversal para el cual $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal respecto a y_1 (ver Proposición VI.1.28). Una vez hecho esto, se puede calcular la pendiente de $f_{p^e}(z)$ relativa a y_2, $Sl_{H_2}(f_{p^e}, z)$. Pueden darse las siguientes posibilidades:

(1) La pendiente $Sl_{H_2}(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n}$ para algún índice $n \in \{1, \ldots, p^e - 1\}$, donde por r_n entendemos el exponente de la factorización y_2 en el coeficiente a_n.

En este caso, se alcanza una forma normal simultánea para las dos hipersuperficies.

(2) La pendiente $Sl_{H_2}(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_n}{n}$ para $n < p^e$ y $\frac{r_{p^e}}{p^e} \notin \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, f_{p^e} está también escrito en forma normal relativa a y_2.

(3) La pendiente $Sl_{H_2}(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} < \frac{r_n}{n}$ para $n < p^e$ y $\frac{r_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces para escribir f_{p^e} en forma normal relativa a y_2, tenemos que someter a f_{p^e} al proceso de limpieza de potencias p^e (ver VI.1.24). Veamos que este proceso de limpieza conserva la forma normal relativa a y_1.

El polinomio mónico

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e},$$

es tal que el término independiente a_{p^e} tal que se puede factorizar como

$$a_{p^e} = y_2^{r_{p^e}} y_1^{r'_{p^e}} g_0 + \ldots$$

Para que sea necesario realizar una limpieza, se tiene que cumplir adicionalmente que $\frac{r'_{p^e}}{p^e} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Además se observa que $\frac{r'_{p^e}}{p^e} \geq Sl_{H_1}(f_{p^e}, z)$, por lo que el hipotético cambio de variables realizado en el proceso de limpieza es de la forma

$$z_1 = z - y_1^{\frac{r_{p^e}}{p^e}} y_2^{\frac{r'_{p^e}}{p^e}} \alpha.$$

En la Proposición VI.1.28 hemos visto que la forma normal es estable por cambios de variables de este tipo. Por tanto, después del proceso de limpieza, alcanza una forma normal simultánea para y_1 e y_2.

Por inducción, se puede repetir este proceso para el número total de hipersuperficies excepcionales que tengamos que considerar. $\circlearrowleft$

5.2. Álgebra monomial virtual para varias hipersuperficies

5.5. Recordemos, que queremos trabajar en un contexto más general que el de una hipersuperficie definida por un único polinomio. Queremos poder considerar los monomios virtuales previamente citados para varias hipersuperficies en el caso en el que estemos trabajando con álgebras. De hecho, la situación es la que sigue:

Partimos de un álgebra diferencial absoluta $\mathcal{G}$ que es integralmente cerrada. Se considera una sucesión de transformaciones monoidales

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\
V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \\
\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta_r} \\
V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi'_1} & V_1^{(d-1)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi'_r} & V_r^{(d-1)} \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 & & & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r
\end{array} \tag{VI.23}$$

como la dada en (VI.22). Es decir, supondremos que $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \subset \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}[W]$ es un álgebra monomial soportada en el lugar excepcional, $E = \{H_1, \ldots, H_r\}$. Lo mismo sucede con su pull-back a $V_r^{(d)}$.

Al identificar $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r$ con su pull-back, el álgebra de eliminación se puede escribir como

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = I(H_1)^{\alpha_1} \ldots I(H_r)^{\alpha_r} W^s,$$

donde vamos a suponer que cada exponente α_i es $\alpha_i \geq 1$, para $i = 1, \ldots, r$. Si para algún índice $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha_j = 0$, se cumple que $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r)$ está enteramente soportado en la unión del resto de hipersuperficies excepcionales, es decir,

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \subset \bigcup_{i \neq j} H_i.$$

Por tanto, podemos prescindir de esta hipersuperficie H_j.

El problema que surge en este contexto es el de levantar la información que se obtiene en cada hipersuperficie excepcional. Es decir, necesitamos justificar que se pueda definir de manera global un álgebra monomial virtual soportada en los excepcionales $\{H_1, \ldots, H_r\}$ y de tal forma que genéricamente en cada excecpional H_i su definición coincida con la definición dada en la Sección VI.3.

Es otras palabras, el objetivo de esta sección es, fijada una sucesión de transformaciones monoidales como la definida en (VI.23), demostrar que existen enteros $h_1, \ldots, h_r$ tales que el álgebra

$$\mathcal{M}W^s = I(H_1)^{h_1} \ldots I(H_r)^{h_r} W^s$$

es tal que la siguiente inclusión es óptima

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s,$$

para cierto parámetro transversal z. De hecho, afirmamos que estos exponentes h_i coinciden con los exponentes virtuales definidos en la Sección VI.3.

Vamos a demostrar por inducción, que se puede construir tal álgebra monomial generalizando respetando lo ya hecho en la Sección VI.3. Para ello, veamos que las transformaciones monoidales a lo largo de centros permisibles respetan la inclusión monomial.

Podemos así plantear las hipótesis de inducción necesarias. Supongamos, por inducción que en el índice $i \leq r$ (donde i denota la transformación monoidal en la que nos encontramos) se cumplen las siguientes tres hipótesis:

(H0) Los exponentes $h_1, \dots, h_i$ están definidos de una manera óptima como en la Sección VI.3.

(H1) Para cada índice $j \leq i$ para el que $h_j \geq 1$, si $\mathcal{G}_i|_{H_j}$ denota la restricción de $\mathcal{G}_i$ a H_j, se cumple que

$$\mathcal{G}_i|_{H_j} = \mathcal{O}_{H_j}\left[\overline{f_{p^e}^{(i)}} W^{p^e}\right],$$

donde $\overline{f_{p^e}^{(i)}}$ denota la restricción de $f_{p^e}^{(i)}$ a H_j. Además, localmente en cada punto de $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_i|_{H_j})$, $\langle\overline{f_{p^e}^{(i)}}\rangle$ es una potencia p^e del ideal de una hipersuperficie lisa en H_j.

(H2) Para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_i)$, si $\{H_{j_1}, \dots, H_{j_\ell}\}$ son las componentes excepcionales que contienen a x (con $1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq i$), entonces

$$\mathcal{G}_i \subset \langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s$$

localmente en x.

En términos locales, lo que estamos asumiendo en (H2) es que tenemos un sistema regular de parámetros adecuado $\{y_1, \dots, y_{d-1}\}$ de $\mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}, \beta_i(x)}$, que $\{z, y_1, \dots, y_{d-1}\}$ es un sistema regular de parámetros de $\mathcal{O}_{V_i^{(d)}, x}$ y que y_{j_t} define a H_{j_t} para $t = 1, \dots, \ell$.

Consideremos el diagrama obtenido a partir de la transformación monoidal de centro C_i:

$$\begin{array}{ccc} V_i^{(d)} & \xleftarrow{\pi_{i+1}} & V_{i+1}^{(d)} \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_i} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{i+1}} \\ V_i^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi'_{i+1}} & V_{i+1}^{(d-1)} \end{array}$$

y denotemos por H_{i+1} la hipersuperficie excepcional obtenida después de la explosión a lo largo del centro C_i. Siguiendo con la notación usada a lo largo de la sección, se observa la siguiente inclusión de álgebras

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i+1} \subset I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_{i+1})^{\alpha_{i+1}} W^s,$$

donde $\alpha_{i+1} \geq 1$. Vamos a definir ahora $h_{i+1}(\leq \alpha_{i+1})$ tal que las condiciones inductivas anteriores pueden ser levantadas a $i+1$.

A continuación, daremos condiciones en las que el exponente virtual automáticamente queda definido como $h_{i+1} \geq 1$ o como $h_{i+1} = 0$.

Consideremos el morfismo

$$H_i^{(d)} \xrightarrow{\overline{\beta}_i} H_i^{(d-1)}$$

definido como la restricción del morfismo liso $V_i^{(d)} \xrightarrow{\beta_i} V_i^{(d-1)}$ a la hipersuperficie lisa $H_i^{(d)}$ y denotemos por $\overline{\mathcal{G}_i}$ la restricción de $\mathcal{G}_i$ a $H_i^{(d)}$. En este contexto se tiene,

$$\overline{\mathcal{G}_i} \sim \mathcal{O}_{H_i^{(d)}}[\overline{f_{p^e}^{(i)}}W^{p^e}, \overline{\Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}^{(i)})}W^{p^e-\alpha}]_{1 \leq \alpha \leq p^e-1} \odot \overline{(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i}W^s,$$

donde con las barras denotamos la restricción a $H_i^{(d)}$. Con esta notación y por propiedades elementales de las álgebras de eliminación, es inmediato ver que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) El exponente $\alpha_i \geq 1$.

(2) $\overline{(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i}$ es trivial (es decir, es el álgebra de Rees que en cada peso está definida por el ideal cero).

De hecho, si se cumplen estas condiciones equivalentes, entonces

$$\overline{\mathcal{G}_i} \sim \mathcal{O}_{H_i^{(d)}}[\overline{f_{p^e}^{(i)}}W^{p^e}]_{1 \leq \alpha \leq p^e-1}$$

y el morfismo finito dado por

$$(H_i^{(d)} \supset)\ V\big(\overline{f_{p^e}^{(i)}}\big) \longrightarrow H_i^{(d-1)}$$

es puramente inseparable (véase [56]).

La siguiente condición geométrica diferenciará las componentes del lugar excepcional:

$$\text{(CD)} \qquad \operatorname{Sing}\big(\mathcal{G}_i|_{H_i^{(d)}}\big) \text{ tiene codimensión pura uno en } H_i^{(d)}.$$

Esta condición geométrica (CD) está estrechamente relacionada con el invariante τ. Además, si (CD) se cumple, entonces también se cumplen las dos condiciones equivalentes (1) y (2).

La prueba de la siguiente Proposición mostrará que si C_{i-1} es el centro de la transformación monoidal $V_{i-1}^{(d)} \xleftarrow{\pi_{C_{i-1}}} V_i^{(d)}$, entonces la condición (CD) se cumple si y sólo si se dan las siguientes condiciones:

(a) el orden de $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i-1}$ es > 1 a lo largo de C_{i-1} (o equivalentemente, $\overline{(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i}$ es el álgebra nula ya que en este caso $\alpha_i > 0$).

(b) $\overline{f^{(i)}_{p^e}}$ es localmente un potencia p^e de una hipersuperficie lisa en $H^{(d)}_i$.

Proposición 5.6. *Si se cumple la condición* (CD) *para* $H^{(d)}_i$*, entonces el invariante* τ *de* $\mathcal{G}_{i-1}$ *es 1 a lo largo de los puntos cerrados de* C_{i-1}*.*

Demostración. Localmente en un punto cerrado $x \in C_{i-1}$ existe un morfismo transversal

$$V^{(d)}_{i-1} \xrightarrow{\beta_{i-1}} V^{(d-1)}_{i-1},$$

y una presentación local de $\mathcal{G}_{i-1}$ de la forma

$$\mathcal{G}_{i-1} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}[f^{(i-1)}_{p^e} W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f^{(i-1)}_{p^e}) W^{p^e-\alpha}]_{1 \leq \alpha \leq p^e-1} \odot (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i-1},$$

tal que x es un punto de orden p^e de $f^{(i-1)}_{p^e}$ y, localmente en el punto, la proyección β_{i-1} es transversal a la hipersuperficie definida por $f^{(i-1)}_{p^e}$.

Bajo estas condiciones, si $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} = 1$, entonces el álgebra de eliminación tiene invariante τ igual a cero (ya que por el Corolario IV.3.5, se cumple que $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} \geq \tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{i-1},\beta}} + 1$). De forma equivalente, si $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} = 1$, entonces el orden del álgebra de eliminación $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i-1}$ es > 1 en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}_{i-1},\beta_{i-1}(x)}$.

Si $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} = 1$ a lo largo de todos los puntos cerrados del centro C_{i-1}, entonces

$$\operatorname{ord}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i-1})(\beta_{i-1}(x)) > 1,$$

para todo punto cerrado $\beta_{i-1}(x) \in \beta_{i-1}(C_{i-1}) \subset V^{(d-1)}_{i-1}$. Por tanto,

$$\operatorname{ord}(\beta^*_{i-1}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i-1}))(x) > 1$$

a lo largo de los puntos cerrados $x \in C_{i-1}$.

Supongamos primero que C_{i-1} es un punto cerrado y que $\operatorname{Sing}(\overline{\mathcal{G}_i})$ tiene codimensión pura 1. Entonces, $\operatorname{In}_{I(C_{i-1})}(f^{(i-1)}_{p^e}) \in gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})$ (los polinomios homogéneos no nulos de grado p^e) induce una hipersuperficie en $\operatorname{Proj}(gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}))$ que contiene una hipersuperficie de puntos de orden p^e. Bajo estas condiciones, afirmamos que esto sólo puede suceder si $\operatorname{In}_{I(C_{i-1})}(f^{(i-1)}_{p^e})$ es una potencia p^e de una forma lineal.

Para demostrar esta última afirmación, basta con observar que

$$\operatorname{Proj}(gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}))$$

es la fibra del blow-up y $\overline{f}^{(i)}_{p^e}$ está inducido por el polinomio homogéneo $\mathrm{In}_{I(C_{i-1})}(f^{(i-1)}_{p^e})$ (que es homogéneo de grado p^e). Los puntos donde $\overline{f}^{(i)}_{p^e}$ tiene orden exactamente p^e es la variedad lineal definida por el subespacio lineal de vértices $\mathcal{L}$ (véase IV.1.3).

Con esto probamos la proposición suponiendo que C_{i-1} es un punto cerrado.

Veamos ahora el caso general, supongamos que C_{i-1} no es necesariamente un punto cerrado. Consideremos

$$H_i^{(d)} = \mathrm{Proj}(gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})) \longrightarrow C_{i-1}.$$

La fibra en cada punto cerrado $x \in C_{i-1}$ es el espacio proyectivo

$$\mathrm{Proj}\left(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}/\mathfrak{M}_x \otimes gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})\right).$$

Si $\{z_1, \ldots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1},x}$ tal que el ideal del centro es $I(C_{i-1}) = \langle z_1, \ldots, z_s\rangle$, entonces

$$gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1},x}) = k'[\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_d],$$

$$gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1},x}) = \mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1},x}/\langle z_1, \ldots, z_s\rangle[\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_s].$$

Existe una inclusión natural dada por

$$\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}/\mathfrak{M}_x \otimes gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}) \hookrightarrow gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}),$$

de tal forma que $\mathrm{In}_x(\mathcal{G}_{i-1})$ (en $gr_{\mathfrak{M}_x}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})$) está generado por la imagen de la clase de $\mathrm{In}_{I(C_{i-1})}(\mathcal{G}_{i-1})$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}/\mathfrak{M}_x \otimes gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})$.

En particular, se deduce que el invariante τ de $\mathrm{In}_x(\mathcal{G}_{i-1})$ es el invariante τ de $(\overline{\mathrm{In}_{I(C_{i-1})}(\mathcal{G}_{i-1})})_x$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}}/\mathfrak{M}_x \otimes gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1}})$.

Por lo tanto, la demostración de la Proposición se puede reducir al caso recién probado en el que C_{i-1} es un punto cerrado. ⥀

Proposición 5.7. *La Proposición* VI.5.6 *es una equivalencia en el caso en el que el centro de explosión, C_{i-1}, sea un punto cerrado.*

Demostración. Supongamos que $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} = 1$ y que C_{i-1} es un punto cerrado. Sean $\{y_1, \ldots, y_{d-1}\}$ un sistema regular de parámetros de $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}_{i-1},\beta(C_{i-1})}$ y z es un parámetro transversal tal que $\{z, y_1, \ldots, y_{d-1}\}$ es un sistema regular de parámetros de $\mathcal{O}_{V^{(d)}_{i-1},C_{i-1}}$.

Si $\tau_{\mathcal{G}_{i-1}} = 1$, entonces $\mathrm{In}_{I(C_{i-1})}(f_{p^e}^{(i-1)})$ es una potencia p^e de una forma lineal en $gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V_{i-1}^{(d)}}) = k[\overline{z}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{d-1}]$, donde con las barras denotamos la forma inicial de los elementos del sistema regular de parámetros $\{z, y_1, \ldots, y_{d-1}\}$.

Como $\mathrm{In}_{I(C_{i-1})}(f_{p^e}^{(i-1)})$ es una potencia p^e de una forma lineal, entonces $\Delta_z^{(s)}(f_{p^e}^{(i-1)})$ tienen clase inicial igual a cero en $I(C_{i-1})^{p^e-s}/I(C_{i-1})^{p^e-s+1}$ para todo $1 \leq s \leq p^e - 1$. Así, $\overline{\mathcal{G}_i}$ es el álgebra en $\mathrm{Proj}(gr_{I(C_{i-1})}(\mathcal{O}_{V_{i-1}^{(d)}}))$ inducida por $(\mathrm{In}(f_{p^e}^{(i-1)}))W^{p^e}$ (en el espacio proyectivo).

En este caso, $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}_i})$ es un espacio lineal de codimensión pura igual a uno. $\circlearrowleft$

Observación 5.8. La Proposición VI.5.7 no es cierta al considerar centros que no son puntos cerrados. Por ejemplo, consideremos el álgebra de Rees $\mathcal{G}$ generada por el polinomio

$$f(Z) = Z^2 + X_1^2 X_3^5 + X_3^3 X_2^3$$

en $k[X_1, X_2, X_3, Z]$ (donde k es un cuerpo de característica 2). Sea C el centro permisible definido por la recta X_3, es decir, $I(C) = \langle Z, X_1, X_2 \rangle$. En este ejemplo es fácil ver que $\tau_{\mathcal{G}} = 1$ a lo largo de los puntos cerrados de C.

Si consideramos ahora la transformación monoidal de centro C, en la carta U_{X_1} (la carta que se obtiene al dividir por X_1), se obtiene que el transformado de f es

$$f_1(Z) = Z^2 + X_3^5 + X_3^3 X_2^3 X_1,$$

donde por comodidad de notación reescribimos las nuevas coordenadas de la carta por X_1, X_2, X_3 y Z. La restricción de f_1 a la hipersuperficie excepcional $\{X_1 = 0\}$ es $\overline{f}_1(Z) = Z^2 + X_3^5$, por lo tanto $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}_1)$ no tiene codimensión pura igual a uno.

Observación 5.9. Recordemos que la Condición (CD) se cumple en la hipersuperficie excepcional $H_i^{(d)}$ si la restricción del álgebra de Rees $\mathcal{G}_i$ a $H_i^{(d)}$ (denotémosla por $\overline{\mathcal{G}_i}$), es tal que $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}_i})$ es una hipersuperficie de codimensión pura igual a uno en $H_i^{(d)}$. Si $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_i)$ es un punto cerrado y si

$$\mathcal{O}_{V_i^{(d)}}[f_{p^e}^{(i)} W^{p^e}, \Delta^{\alpha}(f_{p^e}^{(i)}) W^{p^e-\alpha}]_{1 \leq \alpha \leq p^e-1} \odot (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i$$

es una presentación local de $\mathcal{G}_i$ en x, entonces

$$\mathcal{O}_{H_i^{(d)}}\left[\overline{f_{p^e}^{(i)} W^{p^e}}\right]$$

es una presentación local de $\overline{\mathcal{G}_i}$, y además $\overline{f_{p^e}^{(i)}}$ es una potencia p^e de una hipersuperficie lisa en $H_i^{(d)}$ (localmente en x).

Supongamos que se cumple la inclusión $\mathcal{G}_i \subset \langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s$ donde, tomando coordenadas locales, el álgebra monomial se expresa como

$$\mathcal{M}W^s = y_1^{h_1} \dots y_i^{h_i} W^s$$

(con $h_j \leq \alpha_j$ para $j = 1, \dots, i$). Considerando ahora

$$f_{p^e}^{(i)} = z^{p^e} + a_1 z^{p^e - 1} + \dots + a_{p^e},$$

se sigue que $a_j W^j \in \langle y_1^{h_1} \dots y_i^{h_i}\rangle W^s$ para $j = 1, \dots, p^e$. Es decir,

$$\begin{aligned} h_i \geq 1 &\iff f_{p^e}^{(i)}|_{\{y_i = 0\}} = z^{p^e} \\ &\iff H_i^{(d)} = \{y_i = 0\} \text{ cumple } (\mathsf{CD}). \end{aligned}$$

5.10. Estrategia para el paso inductivo:

En vista de que si la Condición (CD) no se cumple, esto implica que $h_{i+1} = 0$ (y por tanto el exponente h_{i+1} queda ya definido), vamos a suponer entonces que que la Condición (CD) se cumple para H_{i+1}.

Comenzaremos nuestra argumentación mostrando que en cualquier punto cerrado $x' \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_{i+1}) \cap H_{i+1}$ existe un sistema regular de parámetros $\{y_1, \dots, y_{d-1}\}$ en $\mathcal{O}_{V_{i+1}^{(d-1)}, \beta_{i+1}(x')}$ tal que

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}} y_{i+1}\right) W^s, \tag{VI.24}$$

donde los $\{y_{j_t}\}$ definen las hipersuperficies excepcionales diferentes de H_{i+1} que contienen a x', y_{i+1} define a H_{i+1}.

La Condición (VI.24) es un corolario del Lema VI.5.11 y de la Observación VI.5.13.

Una vez probado esto, observaremos que los cambios de variables necesarios para llegar a una expresión de la forma

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}} y_{i+1}^{h_{i+1}}\right) W^s,$$

(proceso de limpieza) son compatibles con el monomio $\left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s$

Lema 5.11. *Supongamos las hipótesis inductivas dadas por* (H0), (H1) *y* (H2). *Recordemos que localmente para cualquier punto cerrado x de C_i ($\subset V_i^{(d)}$), existe una expresión*

$$\mathcal{G}_i \subset \langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s. \tag{VI.25}$$

Entonces:

(i) Existe un parámetro transversal z' tal que $\langle z'\rangle \subset I(C_i)$ y

$$\langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s = \langle z'\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s$$

(ii) Si $\tau_{\mathcal{G}_i}(x) = 1$, entonces el parámetro z' se puede elegir con la condición adicional de cumplir que $\mathrm{In}_x(\langle f_{p^e}^{(i)}\rangle)$ es una potencia p^e de $\mathrm{In}_x(z')$ en $gr_x(\mathcal{O}_{V_i^{(d)},x})$.

Observación 5.12. Reemplazamos los anillos locales $\mathcal{O}_{V_i^{(d)},x}$ y $\mathcal{O}_{V_i^{(d-1)},\beta_i(x)}$ por sus completados $k'[[z, y_1, \dots, y_{d-1}]]$ y $k'[[y_1, \dots, y_{d-1}]]$. Por hipótesis y por (VI.25) podemos tomar:

$$f_{p^e}^{(i)}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e} \in k[[z, y_1, \dots, y_{d-1}]]$$

con

$$a_\alpha W^\alpha \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, p^e. \tag{VI.26}$$

Veámoslo. Una presentación local de $\mathcal{G}_i$ en x está dada por

$$\mathcal{G}_i \sim \mathcal{O}_{V_i^{(d)}}[f_{p^e}^{(i)} W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}^{(i)}) W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i,$$

y ahora (VI.26) se deduce de

$$\Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}^{(i)}) W^{p^e-\alpha} \in \langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s,$$

para $\alpha = p^e - 1, \dots, 0$.

En el Lema VI.5.11 afirmamos que existe un parámetro transversal z' tal que

$$\langle z\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s = \langle z'\rangle W \odot \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s$$

y además $z' \in I(C_i)$.

Asumiendo este resultado como cierto, la transversalidad implica que $\beta_i(C_i)$ es un centro liso en $V_i^{(d-1)}$ y se puede asumir que $I(\beta(C_i)) = \langle y_1, \dots, y_t\rangle$ e $I(C_i) = \langle z', y_1, \dots, y_t\rangle$.

Demostración del Lema VI.5.11. Fijemos la misma notación que previamente. Como C_i es un centro permisible para $\mathcal{G}_i$, entonces $\beta_i(C_i)$ es un centro permisible para $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i$ en $V_i^{(d-1)}$. Supongamos que el ideal de definición de $\beta_i(C_i)$ está dado por

$$I(\beta_i(C_i)) = \langle y_1, \dots, y_r\rangle$$

localmente en $\beta_i(x)$. Denotemos

$$S = \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}/\langle y_1, \dots, y_r \rangle.$$

Se observa que S es un anillo local regular.

El álgebra de eliminación $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i$ está generada en $\mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}$ por elementos homogéneos, digamos

$$g_1 W^{s_1}, \dots, g_q W^{s_q} \in (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i$$

donde cada g_j tiene orden al menos $s_j \geq 1$ en el centro definido por $\langle y_1, \dots, y_r \rangle$. En particular, para cada $j = 1, \dots, q$ se cumple que

$$g_j \in \langle y_1, \dots, y_r \rangle^j.$$

Argumentando de manera análoga, se cumple este mismo hecho para el álgebra de eliminación de $f_{p^e}^{(i)} = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$.

Por tanto,

$$\overline{f_{p^e}^{(i)}} = f_{p^e}^{(i)}|_{y_1=0,\dots,y_r=0} \in S[z]$$

tiene un álgebra de eliminación que es cero. Bajo esta condición, en [56] se prueba que entonces

$$\overline{f_{p^e}^{(i)}} = (z^{p^{e'}} + \gamma_{p^{e'}})^{p^{e''}},$$

donde $e' + e'' = e$, $\gamma_{p^{e'}} \in S$ y $z^{p^{e'}} + \gamma_{p^{e'}}$ es irreducible.

Nótese que la condición $z \in I(C_i)$ se cumple si y sólo si $\overline{f_{p^e}^{(i)}} = z^{p^e}$.

Observemos ahora que si se cumple $j_i \leq r$ para algún índice en (VI.25), es decir, si uno de los parámetros excepcionales forman parte del centro, entonces $\gamma_{p^{e'}} = 0$. Esta afirmación se sigue del hecho de que todos los coeficientes cumplen que

$$a_i W^i \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s.$$

Resta por considerar el caso en el que $j_i \geq r+1$ para todo índice en (VI.25).

Afirmamos que entonces $e' = 0$, es decir, que $\overline{f_{p^e}^{(i)}} = (z - \gamma)^{p^e}$ para algún elemento $\gamma \in S$.

Si esta afirmación se cumple, entonces γ^{p^e} es la clase de a_{p^e} en S. Por otro lado,

$$a_{p^e} W^{p^e} \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \in \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}[W],$$

y entonces, se sigue que

$$\gamma^{p^e} W^{p^e} \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \in S[W]$$

y en particular

$$\gamma W \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \in S[W].$$

Finalmente podemos considerar un elemento $\alpha \in \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}$ tal que

$$\alpha W \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \in \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}[W]$$

y tal que αW induce $\gamma W \in S[W]$.

Si consideramos ahora un cambio de variables de la forma $z' \mapsto z - \alpha$, tendremos que el parámetro z' cumple la condición (i) del Lema, y es tal que $z' \in I(C_i)$.

Nos resta, por mostrar que $e' = 0$. Veámoslo

El centro C_i está incluido en los puntos de multiplicidad p^e de la hipersuperficie definida por $f_{p^e}^{(i)}$. La fórmula de multiplicidad de Zariski (Teorema V.1.1) nos garantiza que el un morfismo finito

$$C_i \longrightarrow \beta_i(C_i)$$

es un isomorfismo localmente en x (y $\beta_i(x)$).

Ahora bien, $\beta_i(C_i)$ está definido por Spec(S) y C_i está definido por una componente irreducible de $\overline{f_{p^e}^{(i)}} \in S[z]$. Pero como la única componente irreducible de $\overline{f_{p^e}^{(i)}}$ es $z^{p^{e'}} + a_{p^{e'}}$, se deduce, a partir del isomofismo anterior, que $e' = 0$.

Para probar el apartado (ii) del Lema, haremos uso del apartado (i). Supongamos así que tenemos

$$f_{p^e}^{(i)}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e - 1} + \dots + a_{p^e},$$

donde z es un parámetro transversal tal que $z \in I(C_i)$

Supongamos que $I(C_i) = \langle z, y_1, \dots, y_r \rangle$ y definamos como

$$Q = \langle y_1, \dots, y_r \rangle \subset \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}},$$

el ideal de definición de $\beta_i(C_i)$. Así, se cumple que

$$\nu_Q(a_i) \geq i, \ i = 1, \dots, p^e$$

y, a menos de clausura entera,

$$a_i W^i \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \subset \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}[W].$$

Consideremos $gr_{M_x}(\mathcal{O}_{V_i^{(d)}}) = k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}]$ donde $Z = In_x(z)$ y $Y_i = In_x(y_i)$. Como $\tau_x = 1$, entonces

$$In_x(f_{p^e}^{(i)}) = Z^{p^e} + A_{p^e}(Y_1, \ldots, Y_{d-1}) \in k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}],$$

donde A_{p^e} es una potencia p^e. Más aún A_{p^e} es un polinomio homogéneo en las variables $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ (es decir, $A_{p^e} = A_{p^e}(Y_1, \ldots, Y_r)$). Esta última afirmación se deduce del hecho de que A_{p^e} es la clase de a_{p^e} en $gr_{M_x}(\mathcal{O}_{V_i^{(d)}})$ en grado p^e y $a_{p^e} \in \langle y_1, \ldots, y_r \rangle^{p^e}$.

Como $a_{p^e} W^{p^e} \in \left(y_{j_1}^{h_{j_1}} \ldots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \subset \mathcal{O}_{V_i^{(d-1)}}[W]$ se sigue que

$$A_{p^e} W^{p^e} \in \left(Y_{j_1}^{h_{j_1}} \ldots Y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \subset k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}][W].$$

Así,

$$Z^{p^e} + A_{p^e}(Y_1, \ldots, Y_r) = (Z + B(Y_1, \ldots, Y_r))^{p^e} \in k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}],$$

para $B = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdots + \lambda_r Y_r$, con $\lambda_i \in k$. Además,

$$(BW)^{p^e} = A_{p^e} W^{p^e} \in \left(Y_{j_1}^{h_{j_1}} \ldots Y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \subset k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}][W].$$

En particular

$$BW \in \left(Y_{j_1}^{h_{j_1}} \ldots Y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\right) W^s \subset k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}][W].$$

Observamos primero que B tiene que ser cero (y por tanto $A_{p^e} = 0$), siempre que $\ell \geq 2$. El caso que nos ocupa es cuando B pudiera no ser cero, esto es si $\ell = 1$ y $j_l \leq r$.

En este caso $B = \lambda_{j_l} Y_{j_l}$ y la condición

$$BW \in \left(Y_{j_1}^{h_{j_1}}\right) W^s \subset k[Z, Y_1, \ldots, Y_{d-1}][W]$$

sólo se puede cumplir si $h_{j_l} \leq s$. En este caso, consideremos el cambio de variables dado por $z' = z + \lambda_{j_l} y_{j_l}$. Este cambio cumple las condiciones pedidas y, en particular, el apartado (ii) del Lema queda demostrado.

Finalmente, observamos que si $\ell = 0$, entonces es suficiente con considerar el cambio dado por $\alpha = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_r y_r$, y de nuevo tendremos que $z - \alpha \in I(C_i)$. ⥀

Observación 5.13. Vamos a probar ahora la Fórmula (VI.24). Recordemos que $I(C_i) \subset \mathcal{O}_{V_i^{(d)},x}$ es el ideal generado por $\langle z, y_1, \dots, y_t\rangle$ y

$$\mathcal{G}_i \subset \langle z\rangle \odot \Big(y_{j_1}^{h_{j_1}} \dots y_{j_\ell}^{h_{j_\ell}}\Big) W^s,$$

(véase (VI.25)).

Fijemos ahora un punto cerrado $x' \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_{i+1}) \cap H_{i+1}$ que se aplica en x. Supongamos que y_1 define H_{i+1} en $\mathcal{O}_{V_{i+1},x'}$. Por el Lema VI.5.11 (ii), $\frac{z}{y_1}$ no es un elemento invertible de $\mathcal{O}_{V_{i+1},x'}$.

Entonces,

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \langle \frac{z}{y_1}\rangle W \odot \Big(\Big(\frac{y_{j_1}}{y_1}\Big)^{h_{j_1}} \dots \Big(\frac{y_{j_{\ell'}}}{y_1}\Big)^{h_{j_{\ell'}}}\Big) W^s,$$

donde $(\frac{y_{j_1}}{y_1}), \dots, (\frac{y_{j_{\ell'}}}{y_1})$ se corresponden con los transformados estrictos de las hipersuperficies del lugar excepcional que contienen al punto x'.

Para probar (VI.24) basta con comprobar que

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \langle z'\rangle W \odot \Big(y_1\Big(\frac{y_{j_1}}{y_1}\Big)^{h_{j_1}} \dots \Big(\frac{y_{j_{\ell'}}}{y_1}\Big)^{h_{j_{\ell'}}}\Big) W^s,$$

para una elección adecuada de z' tal que

$$z' \in \langle \frac{z}{y_1}\rangle W \odot \Big(\Big(\frac{y_{j_1}}{y_1}\Big)^{h_{j_1}} \dots \Big(\frac{y_{j_{\ell'}}}{y_1}\Big)^{h_{j_{\ell'}}}\Big) W^s.$$

Este hecho se sigue por los mismos argumentos que hemos usado para probar el Lema VI.5.11.

Observación 5.14. Los cambios de variables necesarios para calcular h_{i+1} son compatibles con la inclusión

$$\mathcal{G}_{i+1} \subset \langle z'\rangle W \odot \Big(y_{j_1} W^{h_{j_1}} \dots y_{j_{\ell'}} W^{h_{j_{\ell'}}}\Big) W^s.$$

Sea z' fijado como en la Observación VI.5.13. Consideremos la presentación local de $\mathcal{G}_{i+1}$:

$$\mathcal{G}_{i+1} \sim \mathcal{O}_{V_{i+1}^{(d)}}[f_{p^e}^{(i+1)}, \Delta^{(\alpha)}\big(f_{p^e}^{(i+1)}\big) W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e-1} \odot (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_{i+1}.$$

Podemos así calcular,

$$Sl_{H_{i+1}}(f_{p^e}^{(i+1)}, z')$$

y estudiar si $f_{p^e}^{(i+1)}(z')$ está escrito en forma normal relativa a y_{i+1}. Como vimos en la Proposición VI.5.4, podemos alcanzar una forma normal simultánea para todas las hipersuperficies excepcionales que pasan por x', respetando la estructura monomial que teníamos ya fijada.

Por tanto, los cambios de variable necesarios para calcular h_{i+1} son compatibles con la estructura monomial.

Gracias a la discusión que hemos mantenido a lo largo de esta Sección, estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente Teorema:

Teorema 5.15. *Existe un álgebra monomial $\mathcal{M}W^s$ que está definida de forma natural y es óptima cumpliendo las condiciones:*

(i) *El ideal monomial $\mathcal{M}$ divide al ideal monomial del álgebra de eliminación, es decir,*

$$\mathcal{M} = I(H_1)^{h_1} \dots I(H_r)^{h_r} \text{ con } 0 \leq h_i \leq \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, r.$$

(ii) *Localmente en cada punto, existe una sección transversal $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$ tal que*

$$\mathcal{G}_r \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s. \tag{VI.27}$$

A este álgebra monomial $\mathcal{M}W^s$ la llamaremos álgebra monomial virtual*.*

Además, este álgebra $\mathcal{M}W^s$ definida de forma local, globaliza y es independiente de la proyección genérica β elegida.

Demostración. Se sigue de la discusión realizada a lo largo de toda la Sección y del Teorema VI.3.7 ◌

Observación 5.16. El álgebra monomial virtual $\mathcal{M}W^s$ es óptima en el sentido de que para toda álgebra monomial $\mathcal{M}_1W^s$ para la que $\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W^1 \odot \mathcal{M}_1W^s$, se cumple que

$$\mathcal{M}W^s \subset \mathcal{M}_1W^s,$$

es decir, en cierto modo $\mathcal{M}W^s$ es el álgebra monomial más "cercana" a $\mathcal{G}$.

Observación 5.17. La condición (ii) se puede interpretar como que localmente en $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G}_r)$ existe un elemento de orden 1, digamos $z \in \mathcal{O}_{V_r^{(d)},x}$, que define una sección local de $V_r^{(d)} \longrightarrow V_r^{(d-1)}$, tal que

$$\mathcal{G}_r \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s.$$

En particular, esto implica que

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}_r) \supset \operatorname{Sing}(\langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s).$$

A partir de esta inclusión, se deduce que un centro permisible para el álgebra $\langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s$ es un centro permisible para el álgebra $\mathcal{G}_r$. Por lo tanto, una resolución de $\langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s$ induce una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}_r$.

Gracias a la transversalidad del parámetro z, existe una identificación natural entre $\langle z\rangle W \odot \mathcal{M}W^s \subset \mathcal{O}_{V_r^{(d)}}[W]$ y $\mathcal{M}W^s \subset \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}[W]$, por lo tanto una resolución de una de ellas se alcanza de forma equivalente a una resolución de la otra.

Por otro lado una resolución de un álgebra de Rees monomial como $\mathcal{M}W^s \subset \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}[W]$ es fácil de alcanzar por medio de explosiones en centros definidos de manera combinatoria en función de los exponentes h_i del monomio $\mathcal{M}$ (véase por ejemplo [21]).

Un centro de este tipo en $V_r^{(d-1)}$ es también permisible para el álgebra de eliminación $\mathcal{N}W^s$ y sus transformadas (ya que para cada índice $1 \leq i \leq r$ tenemos que $h_i \leq \alpha_i$). Estos centros pueden levantarse de forma *única* a un centro permisible liso de $\mathcal{G}_r$, de tal forma que sesa independiente de la elección del parámetro transversal z en la expresión anterior.

Esta última afirmación se deduce gracias a la fórmula de multiplicidad de Zariski (véase Teorema V.1.1). Si aplicamos dicha fórmula a la restricción $X_r \xrightarrow{\beta_r} V_r^{(d-1)}$ (donde X_r denota la hipersuperficie definida por $f_{p^e}^{(r)}$) se deduce que el levantamiento es único.

Resumiendo, una resolución de $\mathcal{M}W^s$ en $\mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}$ induce una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}_r$,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_r & & \mathcal{G}_{r+1} & & \mathcal{G}_R \\ V_r^{(d)} & \longleftarrow & V_{r+1}^{(d)} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & V_R^{(d)} \end{array}$$

definida por completo en términos de los exponentes de las hipersuperficies excepcionales del ideal monomial $\mathcal{M}$.

Adicionalmente, como mostramos en el Teorema VI.4.10, las secciones transversales son canónicas:

Teorema 5.18. (Canonicidad de las secciones transversales). *Fijemos una sucesión de transformaciones monoidales permisibles*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_r} \\ V^{(d-1)} & \xleftarrow{\pi'_1} & V_1^{(d-1)} & \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi'_r} & V_r^{(d-1)} \\ \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \end{array} \tag{VI.28}$$

Sea $E = \{H_1, \ldots, H_r\}$ el lugar excepcional.En este contexto, podemos considerar el álgebra monomiol virtual $\mathcal{M}W^s$. Sea z un parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado. Entonces, la inclusión

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s$$

es canónica, es decir, fijado z' otro parámetro transversal $\mathcal{M}W^s$-adaptado se cumple que

$$\langle z \rangle W \odot \mathcal{M}W^s = \langle z' \rangle W \odot \mathcal{M}W^s.$$

Demostración. Se sigue de la discusión realizada a lo largo de la Sección, del Teorema y de la Proposición VI.5.13. $\circlearrowleft$

6. Algunos resultados relacionados con el álgebra virtual

En esta sección presentaremos una serie de resultados que nos relacionan el álgebra virtual, el álgebra de eliminación y ciertas situaciones particulares del problema que estamos tratando llegado el caso monomial (o no necesariamente).

Teorema 6.1. *Supongamos la misma situación que a lo largo del capítulo y supongamos que estamos en el caso monomial de* [12], *es decir, el álgebra de eliminación es*

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[I(H_1)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot I(H_r)^{\alpha_r} W^s].$$

Entonces,

(1) *Si $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{M}W^s$ (donde $\mathcal{M}W^s$ denota el álgebra virtual), entonces existe una hipersuperficie de contacto maximal.*

(2) *Si $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r \neq \mathcal{M}W^s$, entonces existe un subíndice i tal que $\alpha_i \neq h_i$. Para los subíndices i para lo que esto sucede, si*

$$f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$$

está escrito en forma normal relativa a y_i, entonces

$$h_i = \frac{r_{p^e}}{p^e} s,$$

donde por r_{p^e} denotamos el exponente de y_i que podemos factorizar en a_{p^e}.

Demostración. Empecemos suponiendo que $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{M}W^s$ y consideremos el polinomio mónico $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$ de grado p^e de la presentación local escrito en forma normal. Por (VI.26) tenemos que cada coeficiente es tal que

$$a_\ell W^\ell \in \mathcal{M}W^s \quad \text{para} \ell = 1, \ldots, p^e.$$

Como $\mathcal{M}W^s = (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r$ y $\beta_r^*((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r) \subset \mathcal{G}_r$, entonces

$$a_1 W^1, \ldots, a_{p^e} W^{p^e} \in \mathcal{G}_r.$$

En particular, zW^1 satisface la relación de clausura entera dada por el polinomio

$$G(\lambda) = \lambda^{p^e} + (a_1 W^1)\lambda^{p^e-1} + \cdots + (a_{p^e} - f_{p^e})W^{p^e},$$

es decir, $G(zW^1) = 0$. Entonces, a menos de clausura entera, $zW^1 \in \mathcal{G}_r$. Y por tanto, este elemento de orden uno del álgebra define una hipersuperfice de contacto maximal para $\mathcal{G}_r$.

Supongamos ahora que $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i \neq \mathcal{M}W^s$, es decir, estamos suponiendo que existe un índice $i \leq r$ para el cual el exponente del ideal de la hipersuperficie excepcional H_i, difiere entre el álgebra de eliminación y el álgebra virtual. Es decir, para este índice $i \leq r$, se cumple

$$h_i \neq \alpha_i.$$

En particular, como $h_i = \text{mín}\{\alpha_i, Sl_H(f_{p^e}, z)\cdot s\}$ donde suponemos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en forma normal y $Sl_H(f_{p^e}, z)$ denota la pendiente relativa a la hipersuperficie H_i respecto de z, se tiene

$$h_i = Sl_H(f_{p^e}, z) < \alpha_i.$$

Supongamos que

$$Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{r_n}{n}$$

con $n < p^e$. Entonces el Teorema VI.2.4 afirma que $h_i = \alpha_i$, lo que nos lleva a contradicción.

Por tanto, la única posibilidad es que la pendiente se alcance exclusivamente en el término independiente a_{p^e}, es decir,

$$h_i = \frac{r_{p^e}}{p^e} s.$$

$\circlearrowleft$

Observación 6.2. En el Teorema VI.6.1 (2) el recíproco no es siempre cierto. Consideremos por ejemplo el álgebra diferencial generada por

$$(T^2 + XYZ)W^2,$$

con álgebra de eliminación

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} = \mathcal{O}_{V^{(3)}}[XYW^1, XZW^1, YZW^1].$$

Realizamos una explosión en el origen y supongamos que localmente estamos en la carta U_X, volvemos a realizar otra explosión en el origen y consideramos la carta U_Y, entonces tenemos la siguiente situación

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \mathcal{O}_{V_2^{(4)}}[(T_2^2 + X_2Y_2Z_2)W^2, X_2Y_2W^1] \quad \text{y} \\ (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2 &= \mathcal{O}_{V_2^{(3)}}[X_2Y_2W^1], \end{aligned}$$

localmente hemos alcanzado el caso monomial y es sencillo comprobar que

$$\mathcal{M}W^2 = \mathcal{O}_{V_2^{(3)}}[X_2Y_2W^2].$$

Ahora bien, si suponemos que $Z_2 \neq 0$, entonces tenemos contacto maximal, pero no se cumple la igualdad entre el álgebra de eliminación y el álgebra virtual.

A continuación enunciaremos una serie de resultados deducibles del Teorema VI.6.1.

Corolario 6.3. *Sea $f_{p^e}(z)$ mónico de grado p^e de nuestro álgebra $\mathcal{G}_r$ escrito en forma normal. Supongamos que la pendiente de f_{p^e} relativa a una hipersuperficie excepcional definida localmente por $\{y_i = 0\}$, es tal que*

$$Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) < \operatorname{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i).$$

Sea $f'_{p^{e'}}(z')$ otro polinomio mónico escrito en forma normal. Entonces, su pendiente relativa a este excepcional cumplirá

$$Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) = Sl_{H_i}(f'_{p^e}, z')$$

y de hecho, en ambos casos, el mínimo de la pendiente se alcanza únicamente en el coeficiente independiente.

Demostración. De la demostración de (2) del Teorema VI.6.1 se deduce que si $Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) < \operatorname{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i)$, entonces el exponente h_i está definido por la pendiente $Sl_{H_i}(f_{p^e}, z)$.

Por otro lado, se cumple $Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) < \mathrm{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i)$ si y sólo si

$$Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) = \frac{r_{p^e}}{p^e} \text{ y } Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) < \frac{r_n}{n} \text{ para } n = 1, \ldots, p^e - 1.$$

Ahora bien, consideremos cualquier otro polinomio mónico $f'_{p^{e'}}(z')$ de grado $p^{e'}$ que esté escrito en forma normal. Como $\mathrm{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i)$ y h_i son invariantes (globales e independientes de la proyección elegida, véase [12] para $\mathrm{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i)$ y el Teorema VI.3.7 para h_i), entonces

$$Sl_{H_i}(f'_{p^e}, z') = h_i < \mathrm{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_i).$$

Por tanto, por el Teorema VI.6.1 (2) se deduce que la pendiente se alcanza únicamente en el término independiente y es la que define el exponente virtual. $\circlearrowleft$

Corolario 6.4. *Consideremos un polinomio mónico $f_{p^e}(z)$ escrito en forma normal respecto de $H_1, \ldots, H_r$. Sea $\mathcal{R}_{f_{p^e}}$ el álgebra de eliminación del polinomio $f_{p^e}(z)$. Entonces,*

$$Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) \leq \mathrm{ord}_{\xi_{H_i}}((\mathcal{R}_{f_{p^e}})_i),$$

para todo índice $i = 1, \ldots, r$.

Demostración. La demostración de este Corolario sigue una forma de argumentación análoga a la del Teorema VI.3.7. Supongamos, para llegar a contradicción, que existe un índice $i \in \{1, \ldots, r\}$ para el cual

$$Sl_{H_i}(f_{p^e}, z) > \alpha_i,$$

Como vimos en el Teorema VI.3.7 podemos adjuntar raíces N-ésimas de y_i (para N coprimo con p). Por el Lemas VI.3.2, se cumple que

$$Sl_{H_i}(\widehat{f}^N_{p^e}, z) = N \cdot Sl_{H_i}(f_{p^e}, z)$$

Si denotamos por α_i el orden a lo largo del excepcional de $\mathcal{R}_{f_{p^e}}$ y por $\widehat{\alpha}_i^N$ el orden a lo largo del excepcional tras adjuntar raíces n-ésimas, entonces el Lema VI.3.3 implica

$$\widehat{\alpha}_i^N = N \cdot \alpha_i.$$

Después de explotar m veces en codimensión 2, donde m denota el mayor entero para el que se cumple $m \leq \alpha_i \cdot N - 1$ (véase la demostración del Teorema VI.3.7), llegamos a una situación en la que el orden a lo largo del excepcional del álgebra de eliminación es < 1 y la pendiente de f_{p^e} relativa a al excepcional es ≥ 1.

En esta situación, $\beta^*(H_i)$ define una componente del lugar singular de codimensión 2 de $\mathrm{Sing}(f_{p^e}, p^e)$, mientras que H_i no es componente del lugar singular de $\mathcal{R}_{f_{p^e}}$. Lo que contradice el hecho de que

$$\mathrm{Sing}(f_{p^e,p^e}) \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{f_{p^e}})$$

probado en en [56]. $\circlearrowleft$

7. Otras caracterizaciones del álgebra monomial virtual

7.1. En esta Sección mostraremos dos caracterizaciones alternativas del álgebra monomial virtual definida a lo largo del Capítulo.

Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Rees y supongamos que tenemos la misma situación que a lo largo del Capítulo. Recordemos que denotamos por $\mathcal{M}W^s$ el álgebra monomial virtual definida previamente.

Proposición 7.2. *Sea $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$ una sección transversal a β. La sección z es $\mathcal{M}W^s$-permisible, es decir, es tal que se cumple la inclusión*

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle \odot \mathcal{M}W^s$$

si y sólo si $\overline{z}W^1$ es entero sobre $\mathcal{M}W^s$ (donde por $\overline{z}$ denotamos la clase de z en $\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_{p^e}\rangle$).

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{G} \subset \langle z \rangle \odot \mathcal{M}W^s$. Es decir, en términos de la presentación local (Teorema IV.3.2), tenemos que

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}(z)W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}(z))W^{p^e-\alpha}]_{1\leq \alpha p^e} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \langle z \rangle \odot \mathcal{M}W^s, \quad \text{(VI.29)}$$

donde $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$. La inclusión dada por (VI.7.2) implica en particular que $a_i W^i \in \mathcal{M}W^s$ para $i = 1, \ldots, p^e$. En $\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_{p^e}\rangle$ se tiene que

$$0 = \overline{f_{p^e}(z)}W^{p^e} = \big((\overline{z})^{p^e} + a_1(\overline{z})^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}\big)W^{p^e},$$

lo que define una relación entera para $\overline{z}W^1$ sobre $\mathcal{M}W^s$ (ya que $a_i W^i \in \mathcal{M}W^s$).

Supongamos ahora que $\overline{z}W^1$ es entero sobre $\mathcal{M}W^s$. Si consideramos ahora el polinomio característico de la multiplicación por $\overline{z}W^1$, tendremos la relación de clausura entera y los coeficientes, en particular, pertenecerán a $\mathcal{M}W^s$, lo que concluye la prueba. ⟳

Corolario 7.3. *Supongamos el mismo contexto y notación que previamente. Denotemos por $\overline{\mathcal{G}}$ la clase del álgebra de Rees $\mathcal{G}$ en $\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_{p^e}\rangle$. Entonces,*

$$\overline{\mathcal{G}} \subset \overline{\mathcal{M}W^s}^{cl.ent},$$

donde por $\overline{\mathcal{M}W^s}^{cl.ent}$ denotamos la clausura entera de $\mathcal{M}W^s$.

Demostración. Consideremos un parámetro transversal $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$ como en la Proposición VI.7.2, es decir, tal que

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}(z)W^{p^e}, \Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}(z))W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha\leq p^e} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \langle z\rangle \odot \mathcal{M}W^s,$$

con $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$. Ahora bien, tomando la restricción a $\mathcal{O}_{V^{(d)}}/\langle f_{p^e}\rangle = \mathcal{O}_X$, tenemos que

$$\overline{\mathcal{G}} \sim \mathcal{O}_X[\overline{\Delta^{(\alpha)}(f_{p^e}(z))}W^{p^e-\alpha}]_{1\leq\alpha p^e} \odot \overline{\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}},$$

donde

$$\overline{\Delta^{(p^e-\alpha)}(f_{p^e}(z))}W^{\alpha} = (a_\alpha + c_1 a_{\alpha-1}\overline{z} + \cdots + c_{\alpha-1}a_1\overline{z}^{\alpha-1})W^\alpha,$$

para ciertos enteros c_i.

Ahora bien, como $a_i W^i \in \mathcal{M}W^s$ para $i = 1, \ldots, p^e - 1$ y $\overline{z}W$ es entero sobre $\mathcal{M}W^s$ (Proposición VI.7.2), entonces $a_{\alpha-j}\overline{z}^j W^\alpha$ es entero sobre $\mathcal{M}W^s$ para todo $j = 1, \ldots, \alpha - 1$. Por lo tanto,

$$\overline{\Delta^{(p^e-\alpha)}(f_{p^e}(z))}W^\alpha \in \overline{\mathcal{M}W^s}^{\mathrm{cl.ent}},$$

para $\alpha = 1, \ldots, p^e - 1$.

Por otro lado, $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{M}W^s$, quedando así probado que

$$\overline{\mathcal{G}} \subset \overline{\mathcal{M}W^s}^{\mathrm{cl.ent}}.$$

⟳

Teorema 7.4. *Existe un álgebra monomial $\mathcal{N}W^r$ tal que:*

(i) *Se cumple la inclusión $\overline{\mathcal{G}} \subset \overline{\mathcal{N}W^r}^{cl.ent}$.*

(ii) *Existe un parámetro transversal* z *tal que* $\overline{z}W^1$ *es entero sobre* $\mathcal{N}W^r$.

(iii) *El álgebra monomial* $\mathcal{N}W^r$ *es óptima cumpliendo las condiciones* (i) *y* (ii). *Es decir, dada cualquier otra álgebra monomial* $\mathcal{N}'W^{r'}$ *que cumpla* (i) *y* (ii), *se tiene que*
$$\mathcal{N}W^r \subset \mathcal{N}'W^{r'}.$$

Demostración. Por la Proposición VI.7.2 y el Corolario VI.7.3, las condiciones (i) y (ii) implican que

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W^1 \odot \mathcal{N}W^s, \tag{VI.30}$$

donde z es el parámetro transversal dado en (ii). Por tanto, existe un álgebra monomial que cumple estas dos primeras condiciones: el álgebra monomial virtual. La condición (iii) se deduce de la optimicidad del monomio virtual para la inclusión (VI.30), hecho demostrado en el Teorema VI.5.15. $\circlearrowleft$

Observación 7.5. Tomando $\mathcal{N}W^r = \mathcal{M}W^s$ en el Teorema VI.7.4, obtenemos una forma alternativa de caracterizar el álgebra monomial virtual.

7.6. A continuación presentaremos una tercera caracterización de nuestro álgebra monomial virtual. Para ello empezaremos dando una definición.

Definición 7.7. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos álgebras de Rees, diremos que $\mathcal{G}_1$ está *débilmente incluida* en $\mathcal{G}_2$, y lo denotaremos por $\mathcal{G}_1 \underset{\text{débil}}{\subset} \mathcal{G}_2$ si se cumple que $\operatorname{Sing}(\mathcal{G}_1) \supset \operatorname{Sing}(\mathcal{G}_2)$ y esta inclusión se preserva por:

- Transformaciones monoidales permisibles para ambas álgebras.
- Restricciones a subconjuntos abiertos.
- Pull-backs de morfismos lisos.

Teorema 7.8. *Consideremos la sucesión de transformaciones monoidales permisibles dada por*

$$\begin{array}{ccccccc} V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \\ \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \end{array}$$

y denotemos por $E = \{H_1, \ldots, H_r\}$ *el conjunto de hipersuperficies excepcionales. Bajo estas hipótesis, existe un álgebra monomial* $\mathcal{N}W^r$, *donde* $\mathcal{N}$ *es un haz invertible soportado en* E *y* $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, *tal que cumple*

(i) *Existe una hipersuperficie de contacto maximal en* $\mathcal{G}_r \odot \mathcal{N}W^s$ *que es transversal a* E.

(ii) *Existe una inclusión débil de álgebras*

$$\mathcal{G}_r \underset{débil}{\subset} \mathcal{N}W^a.$$

(iii) *El álgebra monomial* $\mathcal{N}W^s$ *es óptima para las condiciones* (i) *y* (ii). *Es decir, cualquier otra álgebra monomial* $\mathcal{N}'W^{s'}$ *que cumpla* (i) *y* (ii), *es tal que*

$$\mathcal{N}W^s \subset \mathcal{N}'W^{s'}.$$

Demostración. El álgebra monomio virtual cumple las condiciones (i) y (ii) y de hecho, estas dos condiciones implican que $\mathcal{G}_r \subset \langle z\rangle \odot \mathcal{N}W^r$, donde z puede considerarse como la hipersuperficie dada en (i). La optimidad se deduce tomando $\mathcal{N}W^r = \mathcal{M}W^s$ y aplicando el Teorema VI.5.15. ⥀

Observación 7.9. Tomando $\mathcal{N}W^r = \mathcal{M}W^s$ en el Teorema VI.7.8, obtenemos una tercera caracterización del álgebra monomial virtual.

8. Ejemplos

8.1. El paraguas de Whitney generalizado: $z^2 + xy^{2n}$.

Consideramos en el espacio afín de dimensión 3 sobre un cuerpo k de característica 2, $V^{(3)} = \mathbb{A}^3_k$, la hipersuperficie definida por $z^2 + xy^{2n}$ (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$). Asociada a ella, tomamos el álgebra de Rees diferencial definida por esta hipersuperficie,

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(3)}}[(z^2 + xy^{2n})W^2, y^{2n}W^1].$$

En este caso, es sencillo ver que su álgebra de eliminación respecto de la proyección definida al eliminar z (véase la Observación III.2.14), viene dada por

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(2)}}[y^{2n}W^1].$$

Sea $V^{(3)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(3)}$ la transformación monoidal de $V^{(3)}$ a lo largo del "mango del paraguas de Whitney", es decir, a lo largo del eje $z = 0, y = 0$, i.e., $I(C) = \langle z, y\rangle$. Esta transformación da lugar a una transformación en una dimensión menos, $V^{(2)} \xleftarrow{\pi_{\beta(C)}} V_1^{(2)}$, es decir, la transformación monoidal de centro $I(\beta(C)) = \langle y\rangle$.

Los transformados de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ por las respectivas transformaciones monoidales vienen dados por

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}[(z^2 + xy^{2n-2})W^2, y^{2n-1}W^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 \sim \mathcal{O}_{V^{(2)}}[y^{2n-1}W^1],$$

donde estamos considerando las cartas de dividir por y, U_y, que en este caso reflejan todo el lugar singular.

Se observa que tras esta primera transformación se alcanza el caso monomial. Calculemos pues el monomio virtual, para ello calculemos la pendiente a lo largo del excepcional

$$Sl_{H_1}(\mathcal{G}_1, z) = \text{mín}\left\{\frac{2n-2}{2}, \frac{2n-1}{1}\right\} = \frac{2n-2}{2},$$

mínimo que únicamente aporta el término independiente, pero conviene observar que la forma inicial de este coeficiente xy^{2n-2} no es potencia p^e, por lo que $z^2 + xy^{2n-2}$ está escrito en forma normal y por tanto el monomio virtual viene definido como

$$\mathcal{M}W^s = I(H_1)^{2n-2}W^2.$$

Obsérvese ahora que la resolución combinatoria de este monomio virtual ($n-1$ explosiones en codimensión 1), se puede levantar a una secuencia de transformaciones en dimensión 3 ($n-1$ explosiones a lo largo de $\langle z, y\rangle$ y transformados) que en particular lleva a la resolución de la singularidad.

8.2. La hipersuperficie $v^2 + xyz$. En este ejemplo vamos a considerar la hipersuperficie definida localmente por $v^2 + xyz$ en el espacio afín de dimensión 4 sobre un cuerpo k de característica 2, $V^{(4)} = \mathbb{A}^4_k$. Empecemos considerando el álgebra de Rees diferencial asociada a esta hipersuperficie

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(4)}}[(v^2 + xyz)W^2, xyW^1, xzW^1, yzW^1].$$

Podemos ahora considerar el álgebra de eliminación respecto de la proyección β definida por medio de la eliminación de la variable v. De nuevo estamos considerando un ejemplo puramente inseparable, por lo que llegamos a que

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(3)}}[xyW^1, xzW^1, yzW^1].$$

Observamos que el lugar singular de $\mathcal{G}$ está definido por la unión de tres rectas, digamos L_1, L_2 y L_3, dadas por

$$\{v = 0, x = 0, y = 0\} \cup \{v = 0, x = 0, z = 0\} \cup \{v = 0, y = 0, z = 0\}.$$

El lugar singular de $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ (al estar en el caso diferencial, tiene que coincidir con $\beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}))$) está dado por la unión de otras tres rectas, sean $\widetilde{L}_1$, $\widetilde{L}_2$ y $\widetilde{L}_3$, dadas por

$$\{x=0, y=0\} \cup \{x=0, z=0\} \cup \{y=0, z=0\}.$$

Sea $V^{(4)} \overset{\pi_{\overline{0}}}{\longleftarrow} V_1^{(4)}$ la transformación cuadrática en el origen. Esta transformación induce otra transformación cuadrática en el origen del espacio de dimensión 3, $V^{(3)} \overset{\pi_{\beta(\overline{0})}}{\longleftarrow} V_1^{(3)}$.

Los transformados de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ en la carta que se obtiene al dividir por x (nótese que existe una analogía en las otras dos cartas) vienen dados por

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(4)}}[(v^2+xyz)W^2, xyW^1, xzW^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}[xyW^1, xzW^1].$$

Calculemos ahora el primer exponente virtual, es decir, veamos cuál es la pendiente a lo largo de H_1. Observamos primero que v^2+xyz está escrito en forma normal respecto del excepcional $x=0$. Por tanto,

$$Sl_{H_1}(\mathcal{G}_1, v) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2}$$

es exactamente la pendiente virtual.

Consideramos de nuevo la transformación cuadrática en el origen de la carta, $V_1^{(4)} \overset{\pi_{\overline{0}}}{\longleftarrow} V_2^{(4)}$ y la correspondiente transformación en dimensión 3, la transformación cuadrática en el origen dada por $V_1^{(3)} \overset{\pi_{\beta(\overline{0})}}{\longleftarrow} V_2^{(3)}$.

Los transformados de $\mathcal{G}_1$ y $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$ en la carta de dividir por y están dados por

$$\mathcal{G}_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(4)}}[(v^2+xyz)W^2, xyW^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(3)}}[xyW^1].$$

Habiéndose llegado ya tras esta transformación al caso monomial.

Calculemos el segundo exponente virtual. Observamos que v^2+xyz está escrito en forma normal respecto de $y=0$, por tanto, basta con que calculemos la pendiente de $\mathcal{G}_2$ a lo largo de H_2:

$$Sl_{H_2}(\mathcal{G}_2, v) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Así, el álgebra monomial virtual viene dada por

$$\mathcal{M}W^s \sim I(H_1)\cdot I(H_2)W^2,$$

y tiene como único lugar singular la recta dada por $\{x=0, y=0\}$ en $V_2^{(3)}$. Una resolución combinatoria de este álgebra monomial virtual, se puede levantar a una secuencia de explosiones de $V_2^{(4)}$. Para resolver $\mathcal{M}W^2$, basta considerar la una transformación monoidal a lo largo de $\langle x, y\rangle$, que se levanta a $V_2^{(4)}$ como una transformación a lo largo de $I(C) = \langle v, x, y\rangle$. Denotemos esta transformación por $V_2^{(4)} \xleftarrow{\pi_C} V_3^{(4)}$.

Considerando ahora el transformado de $\mathcal{G}_2$ en la carta dada por la división por y, por ejemplo, se llega a que

$$\mathcal{G}_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(4)}}[(v^2 + xz)W^2, xyW^1],$$

que tiene lugar singular no vacío, pero ahora el invariante τ es mayor que 1 en todo punto, o dicho de otra forma $\tau_{\mathcal{G}_3} \geq 3$ en todo punto de esta carta, (nótese que una situación similar ocurre en el resto de las cartas por simetrías), mientras que $\tau_{\mathcal{G}}$ era 1 en el origen de $V^{(4)}$. El invariante τ ha aumentado.

8.3. Ejemplo de tipo canguro: $z^2 + y^7 + x^4y$.

El ejemplo que vamos a analizar a continuación está propuesto en [31] como un ejemplo representativo de los fenómenos tipo canguro. Es interesante considerar este ejemplo con las técnicas desarrolladas en [56], [12] y en esta memoria, ya que aparentemente estos casos patológicos no se presentan.

Sea $z^2 + y^7 + x^4y$ la hipersuperficie definida de forma local en el espacio afín de dimensión 3 sobre un cuerpo k de característica 2, $V^{(3)} = \mathbb{A}_k^3$. El álgebra de Rees diferencial absoluta asociada a esta hipersuperficie está definida por

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(3)}}[(z^2 + y^7 + x^4y)W^2, (y^6 + x^4)W^1].$$

El lugar singular de $\mathcal{G}$ es la cúspide

$$\{(0, \lambda^3, \lambda^2) \mid \lambda \in k\}.$$

El álgebra de eliminación respecto de la proyección β definida por la eliminación de la variable z es

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(2)}}[(y^6 + x^4)W^1],$$

cuyo lugar singular es la cúspide $\{(\lambda^3, \lambda^2) \mid \lambda \in k\}$.

Sea $V^{(3)} \xleftarrow{\pi_{\overline{0}}} V_1^{(3)}$ la transformación cuadrática en el origen y sea ahora $V^{(2)} \xleftarrow{\pi_{\overline{0}}} V_1^{(2)}$ la transformación cuadrática en el origen inducida por la anterior.

Consideramos las cartas de dividir por y, U_y, entonces los transformados de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ son

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}[(z^2 + y^5 + x^4y^3)W^2, (y^5 + x^4y^3)W^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(2)}}[(y^5 + x^4y^3)W^1].$$

Calculemos ahora el exponente virtual. Como previamente observamos que $z^2+y^5+x^4y^3$ está escrito en forma normal respecto de la hipersuperficie $y=0$, por lo tanto, el exponente virtual queda determinado por

$$Sl_{H_1}(\mathcal{G}_1, z) = \text{mín}\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{3}{2} = \frac{h_1}{s}.$$

Ahora, el lugar singular de $\mathcal{G}_1$ es la unión de una recta y una parábola:

$$\{z=0, y=0\} \cup \{(0,\lambda,\lambda^2) \mid \lambda \in k\}$$

Consideramos la transformación cuadrática de centro C_2 el origen de la carta U_y, i.e., $V_1^{(3)} \overset{\pi_{C_2}}{\longleftarrow} V_2^{(3)}$ y la correspondiente transformación cuadrática en el origen en dimensión 2, $V_1^{(2)} \overset{\pi_{\beta(C_2)}}{\longleftarrow} V_2^{(2)}$. Estudiemos el comportamiento de nuestras álgebras en las cartas de dividir por x:

$$\mathcal{G}_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(3)}}[(z^2 + y^5x^3 + x^5y^3)W^2, (y^5x^4 + x^6y^3)W^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(2)}}[(y^5x^4 + x^6y^3)W^1].$$

Observamos que de nuevo $z^2 + y^5x^3 + x^5y^3$ está escrito en forma normal respecto a $x=0$, por lo que el exponente virtual queda determinado por la pendiente relativa a z:

$$Sl_{H_2}(\mathcal{G}_2, z) = \text{mín}\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{3}{2} = \frac{h_2}{s}.$$

El lugar singular de $\mathcal{G}_2$ es ahora la unión de tres rectas:

$$\{z=0, y=0\} \cup \{z=0, x=0\} \cup \{z=0, y=x\}.$$

Consideramos una transformación de centro C_3 el origen (de la carta U_x), $V_2^{(3)} \overset{\pi_{C_3}}{\longleftarrow} V_3^{(3)}$ y por consiguiente, $V_2^{(2)} \overset{\pi_{\beta(C_3)}}{\longleftarrow} V_3^{(2)}$. En la carta en la que dividimos por y, U_y, se tiene que los transformados de $\mathcal{G}_2$ y $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2$ son

$$\mathcal{G}_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(3)}}[(z^2 + y^6x^3 + x^5y^6)W^2, (y^8x^4 + x^6y^8)W^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(2)}}[(y^8x^4 + x^6y^8)W^1].$$

El polinomio $z^2 + y^6x^3 + x^5y^6$ está escrito en forma normal relativa a $y=0$, ya que a pesar de que la pendiente de este polinomio (respecto a z) está dada por el término independiente y es un número entero, la forma inicial de $y^6x^3+x^5y^6$ no es una potencia de 2. Por tanto, el exponente virtual queda determinado por la pendiente de $\mathcal{G}_3$,

$$Sl_{H_3}(\mathcal{G}_3, z) = \text{mín}\left\{\frac{6}{2}, \frac{8}{1}\right\} = \frac{6}{2} = \frac{h_3}{s}.$$

El lugar singular de $\mathcal{G}_3$ es ahora la unión de tres rectas:

$$\{z = 0, x = 0\} \cup \{z = 0, y = 0\} \cup \{z = 0, x + 1 = 0\}.$$

Por último, para alcanzar la monomialización del álgebra de eliminación, consideramos la transformación monomial a lo largo del centro C_4 dado por la recta $\{z = 0, x + 1 = 0\}$, es decir, $I(C_4) = \langle z, 1 + x\rangle$. Realizamos el cambio de variables dado por $x_1 = 1 + x$, tras este cambio de variables, $I(C_4) = \langle z, x_1\rangle$ y

$$f^{(3)} = z^2 + y^6x^3 + x^5y^6 = z^2 + y^6x_1^2 + y^6x_1^3 + y^6x_1^4 + y^6x_1^5.$$

Podemos limpiar las potencias de 2 de esta expresión haciendo un cambio de variable de la forma $z \mapsto z + y^3(x + x^2)$, obteniéndose así:

$$f^{(3)} = z^2 + y^6x_1^3 + y^6x_1^5.$$

Recordemos ahora que el álgebra de eliminación es invariante por cambios de la forma $z \mapsto z + \alpha$ y que tras el cambio de variable $x_1 = x + 1$, tenemos

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_3 = \mathcal{O}_{V_3^{(2)}}[(y^8(1 + x_1)^4x_1^2)W^1]$$

Tras la transformación monoidal de centro C_4, en la carta de dividir por x_1 se tiene

$$\mathcal{G}_4 \sim \mathcal{O}_{V_4^{(3)}}[(z^2 + y^6x_1 + y^6x_1^3)W^2, (y^8(1 + x_1)^4x_1)W^1], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_4 \sim \mathcal{O}_{V_4^{(2)}}[(y^8(1 + x_1)^4x_1)W^1].$$

Observamos ahora que estamos ya en el caso monomial. Resta por tanto por calcular el último exponente virtual. Gracias al proceso de limpieza que hicimos antes de explotar (podría haberse hecho después de explotar) el polinomio $z^2 + y^6x_1 + y^6x_1^3$ está escrito en forma normal respecto a $x_1 = 0$. Por tanto calculemos la pendiente de $\mathcal{G}_4$ el último exponente virtual queda determinado por

$$Sl_{H_4}(\mathcal{G}_4, z) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\} = \frac{1}{2} = \frac{h_4}{s}.$$

Por tanto, llegado este caso monomial, el álgebra monomial virtual queda definida como

$$\mathcal{M}W^s \sim I(H_1)^3 I(H_2)^3 I(H_3)^6 I(H_4)^1 W^2.$$

En este caso, la resolución combinatoria del álgebra monomial virtual implica la resolución de la singularidad en todo punto de la carta considerada.

A continuación mostramos en una figura, el proceso de monomialización de la hipersuperficie descrita a lo largo de este ejemplo.

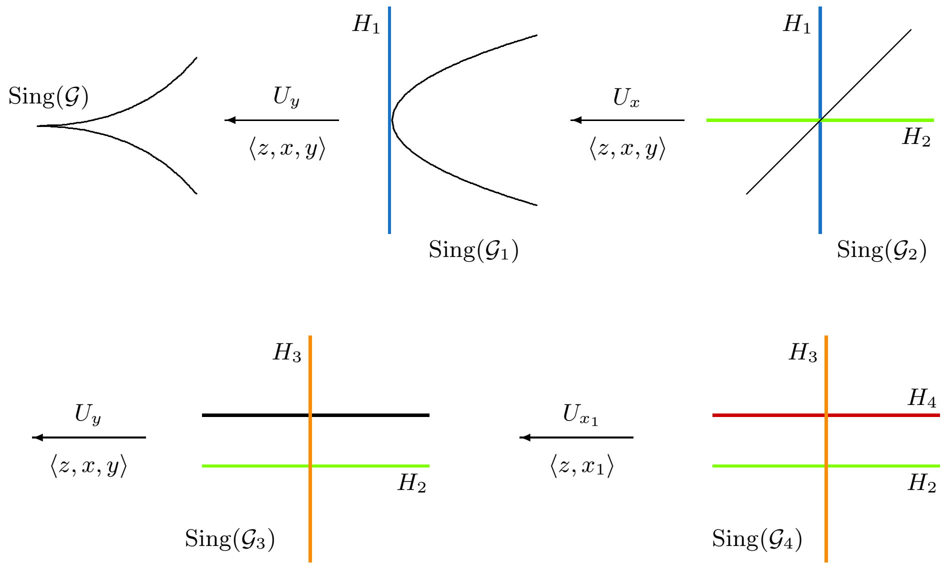


Figura 2: El proceso de monomialización de $z^2 + y^7 + x^4 y$

8.4. La hipersuperficie $z^2 + x_1^7 z + x_2^5 x_3^2$ y el no crecimiento de τ.

Consideremos la hipersuperficie definida de forma local por el polinomio $z^2 + x_1^7 z + x_2^5 x_3^2$ en el espacio afín de dimensión 4 sobre un cuerpo k de característica 2. Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Rees diferencial absoluta asociada a esta hipersuperficie, es decir,

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(4)}}[(z^2 + x_1^7 z + x_2^5 x_3^2)W^2, x_1^7 W^1, x_1^6 z W^1, x_2^4 x_3^2 W^1].$$

Tras fijar la proyección β definida por la eliminación de la variable z, podemos calcular el álgebra de eliminación. En este caso, al ser un caso que no es puramente inseparable, no es tan inmediato.

Nótese que $x_1^7W^1$ y $x_2^4x_3^2W^1$ son elementos libres de la variable z, por lo que son elementos del álgebra de eliminación. Resta, por tanto, calcular el polinomio característico asociado a la multiplicación por $x_1^6zW^1$. La matriz de la multiplicación por $x_1^6zW^1$ en la base dada por $\{1, z\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1^6W^1 \\ x_1^6x_2^5x_3^2W^1 & x_1^{13}W^1 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$V^2 + (x_1^{13}W)V + x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2,$$

es decir, el álgebra de eliminación es

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(3)}}[x_1^7W^1, x_2^4x_3^2W^1, x_1^{13}W^1, x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2]$$

y salvo clausura entera,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \sim \mathcal{O}_{V^{(3)}}[x_1^{14}W^2, x_2^8x_3^4W^2, x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2].$$

Por otro lado, el álgebra de Rees $\mathcal{G}$ se puede expresar por medio de la presentación como

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(4)}}[(z^2 + x_1^7z + x_2^5x_3^2)W^2, x_1^{14}W^2, x_2^8x_3^4W^2, x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2].$$

Consideramos la transfomación monoidal de centro C_1 definido por el ideal $I(C_1) = \langle z, x_1, x_3\rangle$, i.e., $V^{(4)} \overset{\pi_{C_1}}{\longleftarrow} V_1^{(4)}$. Denotemos por $V^{(3)} \overset{\pi_{\beta(C_1}}{\longleftarrow} V_1^{(3)}$ la correspondiente transformación monoidal en $V^{(3)}$ a lo largo del centro $I(\beta(C_1)) = \langle x_1, x_3\rangle$.

En las cartas U_{x_1} (definidas por la división por x_1), los transformados de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ están dados por

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(4)}}[(z^2 + x_1^6z + x_2^5x_3^2)W^2, x_1^{12}W^2, x_1^2x_2^8x_3^4W^2, x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}[x_1^{12}W^2, x_1^2x_2^8x_3^4W^2, x_1^{12}x_2^5x_3^2W^2],$$

que salvo clausura entera, son equivalentes a

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(4)}}[(z^2 + x_1^6z + x_2^5x_3^2)W^2, x_1^{12}W^2, x_1^2x_2^8x_3^4W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 \sim \mathcal{O}_{V_1^{(3)}}[x_1^{12}W^2, x_1^2x_2^8x_3^4W^2].$$

Podemos calcular ahora el exponente virtual a lo largo de $x_1 = 0$, observamos que $z^2 + x_1^6z + x_2^5x_3^2$ está escrito en forma normal respecto a esta hipersuperficie, por lo que el exponente virtual es

$$Sl_{H_1}(\mathcal{G}_1, z) = \text{mín}\left\{\frac{0}{2}, \frac{6}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 0 = \frac{h_1}{s}.$$

Consideremos la transformación a lo largo del centro C_2 definido como $I(C_2) = \langle z, x_1, x_3 \rangle$ (y la correspondiente transformación a lo largo de $I(\beta(C_2)) = \langle x_1, x_3 \rangle$ en dimensión 3). En las cartas U_{x_3} en las que dividimos por x_3, los transformados de $\mathcal{G}_1$ y $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1$ son

$$\mathcal{G}_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(4)}}[(z^2 + x_1^6 x_3^5 z + x_2^5)W^2, x_1^{12} x_3^{10} W^2, x_1^2 x_2^8 x_3^4 W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2 \sim \mathcal{O}_{V_2^{(3)}}[x_1^{12} x_3^{10} W^2, x_1^2 x_2^8 x_3^4 W^2].$$

De nuevo, $z^2 + x_1^6 x_3^5 z + x_2^5$ está escrito en forma normal respecto a $x_3 = 0$, por lo que basta con calcular la pendiente de $\mathcal{G}_2$ relativa a $x_3 = 0$ respecto a z, para determinar el nuevo exponente virtual

$$Sl_{H_2}(\mathcal{G}_2, z) = \text{mín}\left\{\frac{0}{2}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}\right\} = 0 = \frac{h_2}{s}.$$

Por último, sea $V_2^{(4)} \xleftarrow{\pi_{C_3}} V_3^{(4)}$ la transformación monoidal a lo largo del centro C_3 definido como $I(C_3) = \langle z, x_2 x_3 \rangle$ y sea $V_2^{(3)} \xleftarrow{\pi_{\beta(C_3)}} V_3^{(3)}$ la transformación inducida a lo largo de $I(\beta(C_3)) = \langle x_2, x_3 \rangle$. Consideremos las cartas en las que dividimos por x_3, los transformados de $\mathcal{G}_2$ y $(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_2$ están dados por

$$\mathcal{G}_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(4)}}[(z^2 + x_1^6 x_3^4 z + x_2^5 x_3^3)W^2, x_1^{12} x_3^8 W^2, x_1^2 x_2^8 x_3^{10} W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(3)}}[x_1^{12} x_3^8 W^2, x_1^2 x_2^8 x_3^{10} W^2].$$

El exponente virtual viene de nuevo expresado en función de la pendiente de $\mathcal{G}_3$ relativa a $x_3 = 0$ respecto a z (ya que $z^2 + x_1^6 x_3^4 z + x_2^5 x_3^3$ está escrito en forma normal), es decir,

$$Sl_{H_3}(\mathcal{G}_3, z) = \text{mín}\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{8}{2}\right\} = \frac{3}{2} = \frac{h_3}{s}.$$

Si ahora nos centramos en estudiar los puntos del lugar singular tales que $x_1 = u$ donde u es una unidad (es decir, los puntos del eje x_1 distintos del origen), observamos que localmente

$$\mathcal{G}_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(4)}}[(z^2 + u x_3^4 z + x_2^5 x_3^3)W^2, x_3^8 W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_3 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(3)}}[x_3^8 W^2].$$

Habiéndose alcanzado en estos puntos el caso monomial. Localmente el monomio virtual viene dado por

$$\mathcal{M}W^2 \sim \mathcal{O}_{V_3^{(3)}}[x_3^3 W^2].$$

Observamos que la única posibilidad combinatoria de resolver $\mathcal{M}W^2$ es considerar una transformación monoidal en codimensión 1 a lo largo de $\langle x_3 \rangle$, que se levanta a una transformación monoidal en codimensión 2, definida por el centro $\langle z, x_3 \rangle$. Tras esta transformación, los transformados en la carta de dividir por x_3 son

$$\mathcal{G}_4 \sim \mathcal{O}_{V_4^{(4)}}[(z^2 + ux_3^3 z + x_2^5 x_3)W^2, x_3^6 W^2], \quad \text{y}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_4 \sim \mathcal{O}_{V_4^{(3)}}[x_3^3 W^2].$$

Observamos que el monomio virtual es $\mathcal{M}W^s \sim \mathcal{O}_{V_4^{(3)}}[x_3 W^2]$ y que su lugar singular es vacío, pero, en este caso el lugar singular de $\mathcal{G}_4$ es no vacío y el invariante τ no ha crecido.

Sin embargo, el proceso se podría alargar con una explosión a lo largo de $\langle z, x_2, x_3 \rangle$, dando lugar a una nueva álgebra monomial virtual cuyo lugar singular es no vacío y cuya resolución implica la resolución de $\mathcal{G}_4$ (en los casos en los que $x_1 = u$, que eran los que estábamos considerando).

En [6] se introducen una serie de invariantes muy relacionados con el álgebra monomial virtual. Estos invariantes permiten, en el caso de superficies, permiten evitar las patologías presentadas en este ejemplo. De hecho, en [6] se prueba, de manera alternativa a [14], resolución inversa de esquemas de dimensión 2.

Bibliografía

[1] S.S. Abhyankar, Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, *Ann. of Math. (2)* **63** (1956), 491–526.

[2] S.S. Abhyankar, Three dimensional embedded uniformization in characteristic p, Lectures at Purdue University, (1968).

[3] S.S. Abhyankar, Good points of a hypersurface, *Adv. in Math.* **68** (1988), no. 2, 87–256.

[4] A. Benito, The τ-invariant and elimination. Prepublicación 2009. Disponible en `http://arxiv.org/abs/1001.3126`

[5] A. Benito, O. E. Villamayor, Monoidal transformations of singularities in positive characteristic. Prepublicación 2008. Disponible en `http://arxiv.org/abs/0811.4148v2`

[6] A. Benito, O. E. Villamayor, Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic. Prepublicación 2010.

[7] E. Bierstone, P. Milman, Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. Math.* **128** (1997), no. 2, 207-302.

[8] E. Bierstone, P. Milman, Desingularization algorithms. I. Role of exceptional divisors, *Mosc. Math. J.* **3** (2003), no. 3, 751–805, 1197.

[9] A. Bravo, S. Encinas, O. Villamayor, A simplified proof of desingularization and applications, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), no. 2, 349–458.

[10] A. Bravo, O. Villamayor, Strengthening the theorem of embedded desingularization. *Math. Res. Letters* **8** no. 1-2, 79–89.

[11] A. Bravo, O. Villamayor, A strengthening of resolution of singularities in characteristic zero, *Proc. London Math. Soc.* **(3)** 86 (2003), no. 2, 327-357.

[12] A. Bravo, O. E. Villamayor U., Singularities in positive characteristic, stratification and simplification of the singular locus. Aceptado en *Adv. in Math.*

[13] V. Cossart, *Sur le polyèdre caractéristique.* Thèse d'État. 424 pages. Univ. Paris–Sud, Orsay 1987.

[14] V. Cossart, U. Jannsen, S. Saito, Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes. Prepublicación 2009. Disponible en `http://arxiv.org/abs/0905.2191v1` 13 May 2009.

[15] V. Cossart, O. Piltant, Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings, *J. Algebra* **320** (2008), no. 3, 1051–1082.

[16] V. Cossart, O. Piltant, Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II, *J. Algebra* **321** (2009), no. 7, 1836–1976.

[17] S. D. Cutkosky, Resolution of singularities for 3-folds in positive characteristic, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 1, 59–127.

[18] S.D. Cutkosky, *Resolution of singularities*, Graduate Studies in Mathematics, **63**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. viii+186.

[19] S. Encinas, H. Hauser, Strong resolution of singularities in characteristic zero, *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), no. 4, 821–845.

[20] S. Encinas, O. Villamayor, Good points and constructive resolution of singularities, *Acta Math.* **181** (1998), no.1, 109–158.

[21] S. Encinas, O. Villamayor, A course on constructive desingularization and equivariance. *Resolution of singularities A research textbook in tribute to Oscar Zariski*, Progr. Math., **181**, Birkhäuser, Basel, 2000, (H. Hauser, J. Lipman, F. Oort, A. Quirós editors), 147–227.

[22] S. Encinas, O. Villamayor, A new proof of desingularization over fields of characteristic zero, *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003), no. 2, 339–353.

[23] S. Encinas, O. E. Villamayor U., Rees algebras and resolution of singularities. *Actas del "XVI Coloquio Latinoamericano de Algebra" (Colonia del Sacramento, Uruguay, 2005)*, Library of the Revista Matemática Iberoamericana (2007) (W. F. Santos, G. González-Springer, A. Rittatore, A. Solotar, editors) 1–24.

[24] J. Giraud, Contact maximal en caractéristique positive, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **8** (1975), no. 2, 201–234.

[25] J. Giraud, Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive, *Bull. Soc. Math. France* **111** (1983), no. 2, 109–124.

[26] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième Partie)*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No **32**, (1967), 361pp.

[27] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp.

[28] H. Hauser, Excellent surfaces and Their Taut Resolution, *Resolution of singularities. A research textbook in tribute to Oscar Zariski*, Progr. in Math. 181 (Birkhäuser, Basel, 2000) (H. Hauser, J. Lipman, F. Oort, A. Quirós editors), 341–373.

[29] H. Hauser, Seventeen obstacles for resolution of singularities, *Singularities (Oberwolfach, 1996)*, Progr. Math., **162**, Birkhäuser, Basel, 1998. 13, 289–313.

[30] H. Hauser, The Hironaka Theorem on Resolution of Singularities (or: A proof we always wanted to understand), *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **40** (2003), no. 3, 323-403.

[31] H. Hauser, Wild singularities and Kangaroo points for the resolution in positive characteristic. Prepublicación 2009 disponible en `http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/Publications/wild-singularities-july-29.pdf`

[32] H. Hauser, On the Problem of Resolution of Singularities in Positive Characteristic (Or: A proof we are still waiting for), *Bull. Amer. Math. Soc.* 2010, to appear

[33] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II, *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), 109–203; *ibid. (2)* **79** (1964) 205–326.

[34] H. Hironaka. Additive groups associated with points of a projective space. *Ann. of Math. (2)*, **92** (1970) 327–334.

[35] H. Hironaka, Idealistic exponent of a singularity, *Algebraic Geometry, The John Hopkins centennial lectures*, Baltimore, John Hopkins University Press (1977), 52–125.

[36] H. Hironaka, Theory of infinitely near singular points, *J. Korean Math. Soc.* **40** (2003), no. 5, 901–920.

[37] H. Hironaka, Three key theorems on infinitely near singularities, *Singularités Franco-Japonaises*, Sém. Congr., **10** Soc. Math. France, Paris (Jean-Paul Brasselet - Tatsuo Suwa editors) (2005).

[38] H. Hironaka, Program for resolution of singularities in characteristics $p > 0$. Notes from lectures at the Clay Mathematics Institute, Septiembre 2008.

[39] H. Kawanoue, Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic. I. Foundation; the language of the idealistic filtration, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **43** (2007), no. 3, 819–909.

[40] H. Kawanoue, K. Matsuki, Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic (The Kawanoue program) Part II. Basic invariants associated to the idealistic filtration and their properties. Prepublicación 2009. Disponible en `http://arxiv.org/abs/math/0612008` 2 February 2009.

[41] J. Kollar, *Lectures on Resolution of Singularities*, Ann. of Math. Stud., **166**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[42] H.E.W. Jung, Darstellung der funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger veränderlichen x, y in der umgebung einer stelle $x = a$, $y = b$, *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), pp. 289–314.

[43] B. Levi, Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche, *Atti Acad. Sci. Torino* **33** (1897), 66–86.

[44] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **36** (1969) 195–279.

[45] J. Lipman, Desingularization of two-dimensional schemes, *Ann. of Math. (2)*, **107** (1978), no. 1, 151–207.

[46] H. Matsumura, *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1970 xii+262 pp.

[47] T.T. Moh, On a stability theorem for local uniformization in characteristic p, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), no. 6, 965–973.

[48] T.T. Moh, On a Newton polygon approach to the uniformization of singularities in characteristic p, *Algebraic Geometry and Singularities* (eds. A. Campillo, L. Narváez). Proc. Conf. on Singularities La Rábida. Birkhäuser 1996.

[49] R. Narasimhan, Monomial equimultiple curves in positive characteristic. *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983), 402–413.

[50] R. Narasimhan, Hyperplanarity of the equimultiple locus. *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 403–406.

[51] T. Oda, Infinitely very near singular points, *Complex analytic singularities*, Adv. Studies in Pure Math. 8 (North-Holland, 1987) pp.363–404.

[52] T. Oda. Hironaka's additive group scheme. *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki*, Kinokuniya, Tokyo, (1973), 181–219.

[53] T. Oda. Hironaka's additive group scheme. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19(3)** (1983) 1163-1179.

[54] O. E. Villamayor, Constructiveness of Hironaka's resolution, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4^{e} **22** (1989) 1–32.

[55] O. E. Villamayor, Patching local uniformizations, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4^{e}, **25** (1992), 629-677.

[56] O. E. Villamayor U., Hypersurface singularities in positive characteristic, *Adv. Math.* **213** (2007), no. 2, 687–733.

[57] O. E. Villamayor U., Rees algebras on smooth schemes: integral closure and higher differential operators, *Rev. Mat. Iberoamericana* **24** (2008), no. 1, 213–242.

[58] O. E. Villamayor U., Elimination with applications to singularities in positive characteristic, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), no. 2, 661–697.

[59] J. Włodarczyk, Simple Hironaka resolution in characteristic zero, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 4, 779–822

[60] J. Włodarczyk, Program on resolution of singularities in characteristic p. Notes from lectures at RIMS, Kyoto, Diciembre 2008.

[61] R. J. Walker, Reduction of the singularities of an algebraic surface, *Ann.of Math. (2)*, **36** (1935), no. 2, 336–365.

[62] O. Zariski, The reduction of the singularities of an algebraic surface, *Ann. of Math. (2)*, **40** (1939), 639–689.

[63] O. Zariski, Local uniformization theorem on algebraic varieties, *Ann. of Math. (2)*, **41** (1940), 852–896.

[64] O. Zariski, Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties, *Ann. of Math. (2)* **45**, (1944), 472–542

[65] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra. Vol II*, The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York 1960 x+414 pp.

Cantoblanco, Madrid, Enero de 2010. ✍